SCHAUM'S ouTlines

全美经典学习指导系列

概率与统计

（第二版）

〔美〕M. R. 斯皮格尔　J. 希勒　R. A. 斯里尼瓦桑 著

孙山泽　戴中维 译

- 760道详细解答的习题
- 现代的技术术语和符号
- 极易明了的讲解方法
- 准备测试的精品

科学出版社



麦格劳-希尔教育出版集团

(O-1537.0101)
责任编辑：毕 颖

SCHAUM'S ouTlines

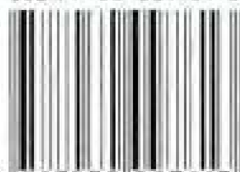
全球销量超越3000万的“全美经典学习指导系列”是您的最佳学习伴侣！

40年来最畅销的教辅系列
全美著名高校资深教授倾力之作
国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译
省时高效的学习辅导，全面详细的习题解答
迄今为止国内最全面的教辅系列
覆盖大学理工科专业

全美经典 学习指导系列

概率与统计
统计学
离散数学
Mathematica使用指南
数理金融引论
机械振动
微分方程
统计学原理（上）
统计学原理（下）
微积分
静力学与材料力学
有限元分析
传热学
近代物理学
2000工程热力学习题精解
工程力学
3000物理习题精解
流体动力学
物理学基础
材料力学
2000离散数学习题精解
工程热力学
数值分析
量子力学
有机化学习题精解
3000化学习题精解
大学化学习题精解
电路
电气工程基础
工程电磁场基础
数字信号处理
数字系统导论
数字原理
电机与机电学
基本电路分析
信号与系统
微生物学
生物化学
生物学
分子和细胞生物学
人体解剖与生理学

ISBN 7-03-009761-0



9 787030 097613 >

McGraw Hill

ISBN 7-03-009761-0/O・1537
定价：29.00 元

全美经典学习指导系列

概率与统计

（第二版）

〔美〕M.R.斯皮格尔　J.希勒　R.A.斯里尼瓦桑　著

孙山泽　戴中维　译

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

内 容 简 介

本书是《全美经典学习指导系列》中的一本.全书共分两部分:概率和统计.共计10章.全书以简洁的形式介绍了概率与统计的基本知识和基本理论.内容通俗易懂,叙述简明扼要,重点和要点突出,尤其是书中760道习题及解答对学生理解书中的内容大有益处.

本书可供大学本科生、教师使用.

Murray R. Spiegel, John Schiller, R. Alu Srinivasan, Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability and Statistics, Second Edition.

ISBN:0 07-135004-7

图字:01-2001-1561号

图书在版编目(CIP)数据

概率与统计(第二版)/〔美〕斯皮格尔等著;孙山泽,戴中维译.—北京:科学出版社,2002
(全美经典学习指导系列)
ISBN 7-03-009761-0

Ⅰ.概… Ⅱ.①斯…②孙…③戴… Ⅲ.①概率论②数理统计 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第069907号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

西源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年2月第 一 版 开本:A4(890×1240)
2002年2月第一次印刷 印张:20
印数:1—5 000 字数:567 000

定价:29.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

第一版前言

概率论的重要而迷人的主题开始于 17 世纪，通过费马(Fermat)和帕斯卡(Pascal)等数学家的努力，回答了涉及赌博机遇的问题．直到 20 世纪，它仍未有建立在公理、定义和定理上的严格的数学理论．随着时间的迁移，人们发现概率论有许多应用，不仅在工程、科学和数学方面，而且在保险统计、农业、商业、医药和心理学等范围，有许多例子说明应用自身贡献了理论的进一步发展．

统计比概率论起源得更早．它主要处理收集、组织和用表或图表示资料．随着概率论的出现，人们明白了统计能够提取有用的结论，在资料分析的基础上做出有道理的决策，比如抽样理论和预测或预报．

这本书的目的是提供一个使用微积分背景的概率论和统计的导引．为了方便，本书分成两部分．第一部分处理概率论(它可以单独当着该科目的导引)．第二部分处理统计．

这本书被设计为既可作为一本概率与统计的正规教课书，又可作为各种现时标准书籍的补充．作为研究工作者或在自学中对此领域有兴趣的读者，这一本参考书也是很有价值的．本书可用于一学年的课程，或者适宜地选择一些题目作为一学期的课程．

我非常感谢已故的 Ronald A. Fisher 爵士的文稿执行人，感谢 Frank Yates 博士，也感谢 Longman Group 公司，因为他们允许本书从他们的书 *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* (1974 年第 6 版)中使用了表Ⅲ．我也愿借此机会感谢 David Beckwith，他做出了杰出的编辑工作．感谢 Nicola Monti，他为书籍做了艺术加工．

M.R.斯皮格尔

第二版前言

《概率与统计》的第一版发行于 1975 年，它是 M.R.斯皮格尔写的，至今已印刷了 21 次.同一作者还写了另一本相近书籍——统计学，正在发行中的 Gian-Carlo Rota 的 *Indiscrete Thoughts* 一书认为该书是统计方面最清晰的导引.所以我们怀着尊敬和不安的心情着手进行这一版本的修订.我们的指导原则是：仅在必须时才做一些修改，修改是为了使本书与当代的其他课本的重点课题一致.集合的广泛处理，以及 20 世纪 60 年代和 70 年代早期的课本中的标准的引导材料被大量删去了；连续随机变量的定义现在是标准的一种，更多地强调了累积分布函数，因为它是比概率密度函数更基础的概念；也更多地强调了假设检验中的 P 值，因为技术已允许容易地确定这些值，它比检验是否达到事先给定的显著性水平提供了更清晰的信息；技术也使省去对数表成为可能；增加了非参数统计一章，扩展了课本的应用，但未提高它的水平；对某些问题作了折衷处理，但多数是一些没有给出任何提示或帮助的定理证明.总之，我们相信第一版的目的是为使用微积分背景的概率与统计呈现一个现代的入门书籍.这一特征使第一版拥有了如此巨大的成功.我们希望这一版也能为更广阔的研究领域服务.

J.希勒

R.A.斯里尼瓦桑

目　录

部分Ⅰ　概　率

部分Ⅱ 统 计

部分Ⅰ 概　　率

第一章　基础概率

随机试验

我们都非常熟悉在科学研究和工程中试验的重要性.试验对我们是有用的,因为我们可以假定,在非常接近的确定条件下进行固定的试验,基本上会得到相同的结果.在这样的环境中,我们可以控制那些对试验结果有影响的变量的值.

然而在某些试验中,我们不可能断定或控制一些变量的值,虽然大多数的条件都是相同的,但每一次试验的结果会不同.这样的试验称为随机的.下面举出一些例子.

例 1.1　我们投掷一个硬币,试验结果可能是出现"反面",用符号 T(或 0)表示,或者是"正面",用符号 H(或 1)表示.也就是,结果是集合$\{T,H\}$(或$\{0,1\}$)的一个元素.

例 1.2　我们投掷一个骰子,试验的结果可能是集合$\{1,2,3,4,5,6\}$中的某一个数.

例 1.3　如果投掷一个硬币两次,会有四种可能的结果,表示为$\{HH,HT,TH,TT\}$,也就是,两个正面,第一次正面第二次反面,等等.

例 1.4　我们用一台机器制造螺丝钉,试验的结果可能是一些螺丝钉是次品.就一个螺丝钉而言,它是集合{次品,非次品}中的一员.

例 1.5　测量一个工厂生产的电灯泡的寿命,试验的结果将是 t 小时,如果我们假定灯泡寿命不超过 4000 小时,则 t 是在一区间中,即有 $0\leqslant t\leqslant 4000$.

样本空间

由随机试验的一切可能的结果组成的一个集合 S,称为样本空间.其中的每一个结果称为一个样本点.经常会有多个样本空间能够用于描述同一个试验,但是通常只有一个会提供最多的信息.

例 1.6　投掷一枚骰子,一个样本空间是集合$\{1,2,3,4,5,6\}$,即全部可能的结果,另一个样本空间可以是{奇数,偶数}.然而很清楚,后者在确定一些结果时是不行的,例如确定结果是否可被 3 整除.

几何地绘出一个样本空间经常很有用.这时,要求使用一个数代替可能的字母.

例 1.7　投掷一个硬币两次,用 0 表示反面,用 1 表示正面,样本空间(参看例 1.3)能够绘成图 1-1 中的点,如(0,1)表示第一次反面第二次正面,即 TH,等等.

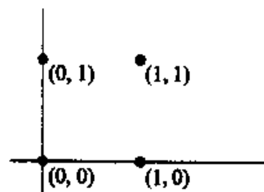


图 1-1

如果一个样本空间仅有有限个数的点,如例 1.7,则称为有限样本空间.如果有如自然数 1,2,3,…那样多的点,则称为可数的无限样本空间.如果有 x 数轴上的一个区间那样多的点,比如 $0\leqslant x\leqslant 1$,则称为非可数的无限样本空间.当一个样本空间是有限的或可数的无限空间时,一般称为离散样本空间,一个非可数的无限空间称为非离散样本空间.

事件

一个事件就是样本空间 S 的一个子集 A，也就是一些可能结果的一个集合. 当一个试验的结果是 A 的一个元素时，则称事件 A 出现了. 当一个事件仅包含 S 的一个单一点时，常称该事件是简单的或基本的.

例 1.8　投掷一个硬币两次，恰好有一次出现正面的事件是样本空间的一个子集，它包含点 $(0,1)$ 和 $(1,0)$，如图 1-2 所示.

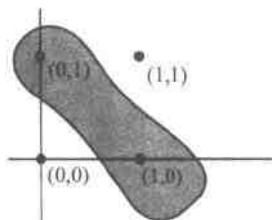


图 1-2

S 自身可看作一个特殊的事件，它是一个必然的或确定的事件，因为必定会出现 S 的一个元素. 同时空集 ($\varnothing$) 称为不可能事件，因 $\varnothing$ 中没有元素会出现.

对 S 中的事件进行集合运算，可以获得 S 中的其他事件. 例如，如果 A 和 B 是事件，则

1. $A\cup B$ 是"A 或 B 或者两者同时出现"的事件，$A\cup B$ 称为 A 与 B 的并或 A 与 B 的和.

2. $A\cap B$ 是"A,B 同时出现"的事件，$A\cap B$ 称为 A 与 B 的交或 A 与 B 的积.

3. A' 是"A 不出现"的事件，A' 称为 A 的补或非.

4. $A-B=A\cap B'$ 是"A 出现但 B 不出现"的事件，特别 $A'=S-A$.

如果事件 A 和 B 是分离的，也就是 $A\cap B=\varnothing$，则称事件是互斥的. 这意味着两者不能同时出现. 如果一个事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任一对都是互斥的，则称为一个互斥事件组.

例 1.9　看投掷一枚硬币两次的试验，设事件 A 是"至少出现一次正面"，而 B 是事件"第二次投掷是反面". 则当 $A=\{HT,TH,HH\}$，$B=\{HT,TT\}$，那么有

$$A\cup B=\{HT,TH,HH,TT\}=S,\quad A\cap B=\{HT\}$$
$$A'=\{TT\},\qquad A-B=\{TH,HH\}$$

概率的概念

在一个随机试验中总是存在不确定性，即一个特殊的事件可能出现也可能不出现. 作为我们所能期望的该事件出现的机会或概率的度量，通常约定为 0 和 1 之间的一个数值. 如果我们肯定该事件一定出现，则它的概率是 100% 或 1，如果我们肯定该事件不会出现，则它的概率是 0. 又比如，当概率是 $\frac{1}{4}$ 时，我们认为它出现的机会是 25%，不出现的机会是 75%. 等价地，我们可以说相对它的实现反映出的优势比为 75%:25%，或 3:1.

存在两种重要的方法，这时一个事件的概率可以用这些方法估计出来.

1. 古典方法. 如果总共有 n 种可能的状态，每一种状态都是完全相似的，而一个事件在 h 个不同的状态中会出现，则这个事件的概率是 h/n.

例 1.10　假定我们想知道一次投掷硬币中掷出正面的概率. 由于在投掷一枚硬币时有两个完全相似的状态，也就是正面和反面（假定不存在滚动或边缘站立），这两个状态仅有一个出现正面，我们有理由认为这个所求的概率是 1/2. 这里，当然要假定硬币是均匀的，也就是不偏向任何一个状态.

2. 频率方法. 将一个试验进行 n 次，当 n 相当大时，其中有 h 次出现某一事件，则该事件的概率是 h/n. 这也称为该事件的经验概率.

例 1.11　投掷一枚硬币 1000 次，发现正面出现 532 次，则我们估计正面出现的概率为 $\frac{532}{1000}=0.532$.

古典方法和频率方法两者都有较严重的缺陷. 第一种中，词"完全相似"是含糊不清的，而第二种中的"相当大"也是含糊不清的. 因此，数学家导出了概率的公理化方法.

概率的公理

假定我们有一个样本空间 S. 如果 S 是离散的,则其全部子集均视为事件,反之如果 S 是非离散的,则仅有一些特殊子集(称为可测的)视为事件.对事件类 C 中的一个事件 A,我们给以一个实数 $P(A)$. 如果下列公理能够满足,则称 P 是概率函数, $P(A)$ 称为事件 A 的概率.

公理 1 对类 C 中的每一个事件 A,

$$P(A) \geqslant 0 \tag{1}$$

公理 2 对类 C 中的确定事件 S,

$$P(S) = 1 \tag{2}$$

公理 3 对类 C 中的一些互斥事件 $A_1, A_2, \cdots$,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots \tag{3}$$

特别,对两个互斥事件 A_1, A_2,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \tag{4}$$

概率的一些重要定理

从上述的公理能够证明许多关于概率的定理,在今后的工作中它们是重要的.

定理 1-1 如果 $A_1 \subset A_2$,则 $P(A_1) \leqslant P(A_2)$,同时

$$P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$$

定理 1-2 对任一事件 A

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1 \tag{5}$$

也就是一个概率在 0 和 1 之间.

定理 1-3

$$P(\varnothing) = 0 \tag{6}$$

也就是不可能事件的概率为 0.

定理 1-4 如果 A' 是 A 的补,则

$$P(A') = 1 - P(A) \tag{7}$$

定理 1-5 如果 $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$,其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互斥事件,则

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \tag{8}$$

特别,如果 $A = S$ 为样本空间,则

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1 \tag{9}$$

定理 1-6 如果 A 和 B 是两个事件,则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{10}$$

更一般地,如果 A_1, A_2, A_3 是三个事件,则

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) \\ & - P(A_3 \cap A_1) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned} \tag{11}$$

也可以推广到 n 个事件.

定理 1-7 对任意事件 A 和 B

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') \tag{12}$$

定理 1-8 如果一个事件 A 必定出现在一组互斥事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的某个中,则

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \cdots + P(A \cap A_n) \tag{13}$$

概率的确定

如果一个样本空间 S 包含有限个结果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,则由定理 1-5,

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1 \tag{14}$$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是由 $A_i=\{a_i\}$ 给出的基本事件.

从而,我们可以选择一些非负数作为这些简单事件的概率,只要它们满足(14)式.特别,我假定全部简单事件有相等概率,则

$$P(A_k)=\frac{1}{n},\quad k=1,2,\cdots,n \tag{15}$$

如果 A 是一个如此的 h 个简单事件叠加的事件,则我们有

$$P(A)=\frac{h}{n} \tag{16}$$

这与前面给出的古典概率方法是等价的.我们也可使用其他方法确定概率,比如前面给出的频率方法.

确定概率是提出一种数学模型,这一模型是否成功必须按同样的方式作多次试验来进行检验,采用的方式在物理或其他科学中的理论也须经试验检验.

例 1.12 掷一枚骰子一次,求掷出 2 或 5 的概率.

解 ☞ 这个样本空间是 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$.如果我们对每一个样本点指定相等的概率,也就是我们假定骰子是均匀的,那么

$$P(1)=P(2)=\cdots=P(6)=\frac{1}{6}$$

掷出 2 或 5 的事件可表示为 $2\cup 5$,因此

$$P(2\cup 5)=P(2)+P(5)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

条件概率

设 A 和 B 是两个事件(如图 1-3),其中 $P(A)>0$.用 $P(B|A)$ 记给定 A 出现时 B 的概率.由于 A 已经出现是已知事实,它就成了新的样本空间,代替了原来的 S.这就引出定义

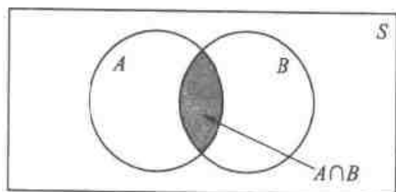


图 1-3

$$P(B\mid A)\equiv\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \tag{17}$$

或

$$P(A\cap B)\equiv P(A)P(B\mid A) \tag{18}$$

(18)式说明事件 A 和 B 同时出现的概率等于 A 出现的概率乘以 A 已发生时 B 出现的概率.称 $P(B|A)$ 为 A 发生时 B 的条件概率,也就是给定 A 已经发生时 B 将出现的概率.很容易看出条件概率满足前面给出的公理.

例 1.13 求投掷一枚骰子点数小于 4 的概率.(a)无任何其他信息.(b)已知掷出的点数是奇数.

解 ☞ (a)用 B 记事件{点数小于 4}.由于 B 是掷出 1,2,3 几个事件的并,按定理 1-5,有

$$P(B)=P(1)+P(2)+P(3)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

其中假定各样本点概率相等.

(b)用 A 记事件{出现奇数点},则 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.且 $P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,所以

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}$$

因此,投掷结果是奇数这一附加信息使所求概率从 $\frac{1}{2}$ 变成了 $\frac{2}{3}$.

条件概率的定理

定理 1-9 对任意三个事件 A_1,A_2,A_3,有

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2) \tag{19}$$

(19)式说明,A_1,A_2 和 A_3 同时出现的概率等于 A_1 出现的概率乘已知 A_1 出现时 A_2 出现的概率再乘上已知 A_1 和 A_2 都出现时 A_3 出现的概率.这一结果可推广到 n 个事件.

定理 1-10 如果事件 A 必定出现在互斥事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的某一事件中,则

$$P(A)=P(A_1)P(A\mid A_1)+P(A_2)P(A\mid A_2)+\cdots+P(A_n)P(A\mid A_n) \tag{20}$$

独立事件

如果 $P(B|A)=P(B)$,也就是 B 出现的概率不受 A 出现或不出现的影响,则称 A 和 B 是独立事件.从(18)式可看出这等价于

$$P(A\cap B)=P(A)P(B) \tag{21}$$

反之,如果有(21)式,则 A 和 B 是独立的.

称 $A_1,A_2,A_3$3 个事件是独立的,若它们每一对是独立的

$$P(A_j\cap A_k)=A(A_j)P(A_k),\quad j\neq k,\quad \text{这里 } j,k=1,2,3 \tag{22}$$

而且同时有

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3) \tag{23}$$

注意,(22),(23)式单独自身一个是不够的.多于 3 个事件的独立性也容易定义.

贝叶斯(Bayes)定理

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一组互斥事件,它们的并是样本空间 S,也就是这些事件必有一个出现.则对任一个事件 A,有下列重要定理:

定理 1-11(贝叶斯法则)

$$P(A_k\mid A)=\frac{P(A_k)P(A\mid A_k)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(A\mid A_j)} \tag{24}$$

这一公式使我们能找出可以导致 A 出现的各种事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的概率.这就使贝叶斯定理经常被认为是一条关于因果概率的定理.

组合分析

在很多情况样本空间的样本点数不是非常大,从而直接计数样本点数获得概率并不困难.当然,有些问题直接计数实际上是不可能的.计数要使用组合分析,这也称为一种精细的计数方法.

计数的基本原则,三种组合图

如果第一件事情可以用 n_1 种不同的方式完成,其后的第二件事情可以用 n_2 种不同的方式完成,……,最后第 k 件事情可以用 n_k 种不同的方式完成,那么依次完成这全部 k 件事情共有 $n_1n_2\cdots n_k$ 种不同的方式.

例 1.14 如果一个人有 2 件衬衫和 4 条领带,那么他有 $2\cdot4=8$ 种衬衫、领带的配合方式.

一种图常用来说明上述原则,由于图 1-4 的形状它被称为树形图.

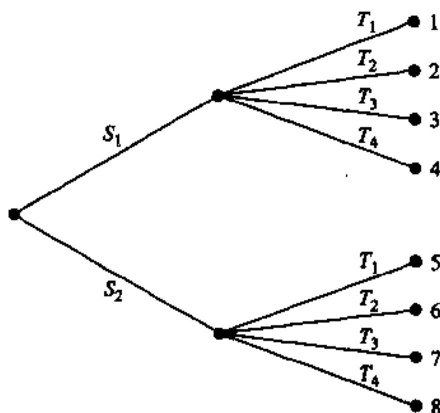


图 1-4

例 1.15 用 S_1, S_2 代表衬衫,用 T_1, T_2, T_3, T_4 代表领带,衬衫和领带的配合的各种不同方式可以用树形图绘在图 1-4 中.

排列

假定给定 n 个不同的物体,想安排它们中的 r 个成一条线.由于第一物体有 n 种选择,做完第一个后,第二个有 $n-1$ 种选择,……,最后第 r 个物体有 $n-r+1$ 种选择,按照计数的基本原则,不同的安排数目为

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \tag{25}$$

这个数通常称为排列,它是 r 个因子的乘积,称为 n 个物体中一次取 r 个的排列数.

在 $r=n$ 的特殊情形,(25)式变成

$$_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n! \tag{26}$$

称为 n 的阶乘.将(25)式写成阶乘的形式为

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{27}$$

如果 $r=n$,从(27)式和(26)式看出只能是 $0!=1$,实际上这也是 $0!$ 的定义.

例 1.16 从 7 个不同字母 A, B, C, D, E, F, G 中构成 3 个字母组的不同排列数是

$$_7P_3 = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

假定一组 n 个物体,其中 n_1 个是第一种类型(即相互间无差异),n_2 个是第二种类型,……,n_k 个是第 k 种类型,当然 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.那么,这 n 个物体的不同排列数为

$$_nP_{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!} \tag{28}$$

参看习题 1.25.

例 1.17 词 MISSISSIPPI 的 11 个字母包含了 1 个 M,4 个 I,4 个 S,2 个 P,它们的不同排列数为

$$\frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!} = 34\ 650$$

组合

在排列中我们对物体的安排次序是感兴趣的,例如,abc 与 bca 是不同的排列.然而,在许多问题中我们仅关心选出的是哪些物体,而不关心它们的次序.这种选择称为组合.例如,abc 与 bca 是同样的组合.

从 n 个中选择 r 个物体的总的组合数(也称为 n 个物体中一次取 r 个的组合)记为 $_nC_r$ 或 $\binom{n}{r}$.有(参看习题 1.27)

$$\binom{n}{r} = {_nC_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{29}$$

也可以写成

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{_nP_r}{r!} \tag{30}$$

很容易说明有

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad 或 \quad {_nC_r} = {_nC_{n-r}} \tag{31}$$

例 1.18 从总数为 8 的一堆纸牌中选择 3 张牌,不同状态数为

$$ {}_8C_3 = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56 $$

二项系数

式(29)中的数常称为二项系数,这是由于有二项展开式

$$ (x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n \tag{32} $$

它们有许多有趣的性质.

例 1.19

$$ \begin{aligned} (x+y)^4 &= x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 \\ &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \end{aligned} $$

$n!$ 的斯特林(Stirling)近似

当 n 相当大时,直接给出 $n!$ 的值可能不太实际,这时,可以使用近似公式

$$ n! \sim \sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n} \tag{33} $$

其中 $e = 2.71828\cdots$,是自然对数的底.(33)式中的符号~意味着左边与右边的比当 $n \to \infty$ 时趋于 1.

数值计算中的斯特林公式的值会使计数技术大为失色,但是这个近似给出了理论估计值(参看附录 A).

习 题 解 答

随机试验,样本空间,事件

1.1 从通常的一副 52 张扑克牌中随机抽取一张.在下列情况下描述样本空间.(a)不考虑牌的花色,(b)考虑牌的花色.

解 (a)如果不考虑整套牌的花色,样本空间可由牌点 A,二点,……,十点,J,Q,K 组成,即可表示为$\{1,2,\cdots,13\}$.

(b)如果考虑整套牌,样本空间包含红心、黑桃、方块、梅花 A,…,一直到红心、黑桃、方块、梅花 K.如果用 1,2,3,4 分别表示红心、黑桃、方块、梅花,则黑桃 J 可写为(11,2).样本空间有 52 个样本点,如图 1-5.

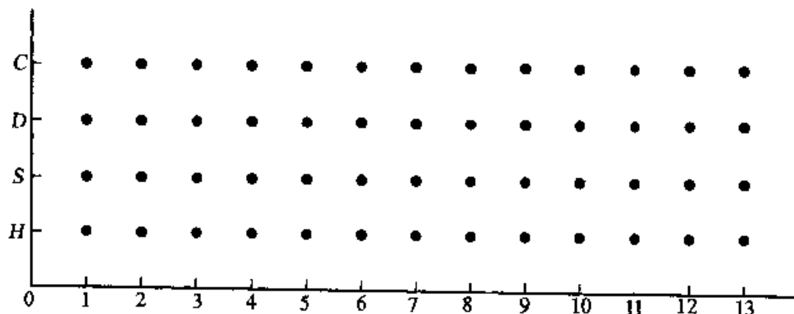


图 1-5

1.2 如习题 1.1 的试验,设 A 是事件{取到 K}而 B 是{取到梅花}.描述事件(a)$A \cup B$,(b)$A \cap B$,(c)$A \cup B'$,(d)$A' \cup B'$,(e)$A - B$,(f)$A' - B'$,(g)$(A \cap B) \cup (A \cap B')$.

解 (a)$A \cup B$ = {取到 K 或梅花}.

(b)$A \cap B$ = {取到 K 同时取到梅花} = {取到梅花 K}.

(c)因为 $B=\{$梅花$\}$, $B'=\{$非梅花$\}=\{$红心,方块,黑桃$\}$.
所以 $A\cup B'=\{$取到 K 或红心或方块或黑桃$\}$.
(d)$A'\cup B'=\{$非 K 或非梅花$\}=\{$不是梅花 $K\}=\{$取到梅花 K 以外的任一张牌$\}$.
这也可以用 $A'\cup B'=(A\cap B)'$ 和(b)得到.
(e)$A-B=\{$取到 K 但不是梅花$\}$.
这与 $A\cap B'=\{$取到 K 且不是梅花$\}$是一样的.
(f)$A'-B'=\{$非 K 但不是"非梅花"$\}=\{$非 K 但是梅花$\}=\{$除 K 以外的任一梅花$\}$.
这也可以用 $A'-B'=A'\cap(B')'=A'\cap B$ 得到.
(g)$(A\cap B)\cup(A\cap B')=\{(K$ 且梅花)或(K 且非梅花)$\}=\{$取到 $K\}$.
这也可以用$(A\cap B)\cup(A\cap B')=A$ 得到.

1.3 用图 1-5,描述事件(a)$A\cup B$,(b)$A'\cap B'$.

解 ☞ 所要求的事件描述在图 1-6 中.用同样的方法,习题 1.2 中的各个事件都可用这样的图描绘.从图 1-6 可以看到 $A'\cap B'$是 $A\cup B$ 的补.

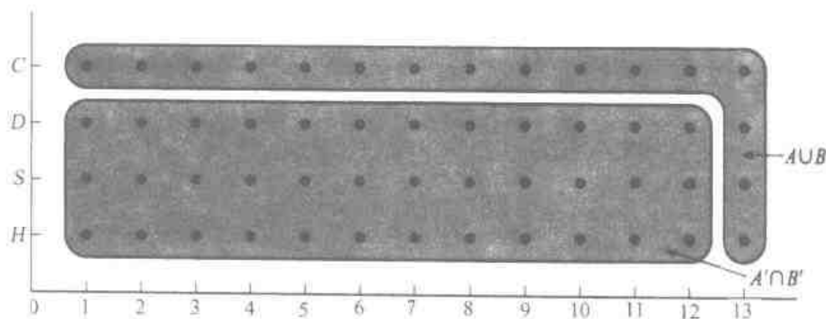


图 1-6

概率的定理

1.4 证明(a)定理 1-1,(b)定理 1-2,(c)定理 1-3.

证明 ☞ (a)我们有 $A_2=A_1\cup(A_2-A_1)$,此处 A_1 与 A_2-A_1 互斥,所以由公理 3

$$P(A_2)=P(A_1)+P(A_2-A_1)$$

从而

$$P(A_2-A_1)=P(A_2)-P(A_1)$$

按公理 1,$P(A_2-A_1)\geqslant 0$,故 $P(A_2)\geqslant P(A_1)$.
(b)按公理 1,已知 $P(A)\geqslant 0$,仅需证明 $P(A)\leqslant 1$.注意到 $A\subset S$,因此由定理 1-1 和公理 2,有 $P(A)\leqslant P(S)=1$.
(c)我们有 $S=S\cup\varnothing$,因为 $S\cap\varnothing=\varnothing$,由公理 3 即得

$$P(S)=P(S)+P(\varnothing)\quad 或\quad P(\varnothing)=0$$

1.5 证明(a)定理 1-4,(b)定理 1-6.

证明 ☞ (a)我们有 $A\cup A'=S$,又由于 $A\cap A'=\varnothing$,故有

$$P(A\cup A')=P(S)\quad 或\quad P(A)+P(A')=1$$

即

$$P(A')=1-P(A)$$

(b)从图 1-7 的成恩(Venn)图可以看到

$$A\cup B=A\cup[B-(A\cap B)]$$

由于 A 和 $B-(A\cap B)$是互斥的,使用公理 3 和定理 1-1 即有

$$P(A\cup B)=P(A)+P[B-(A\cap B)]$$
$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

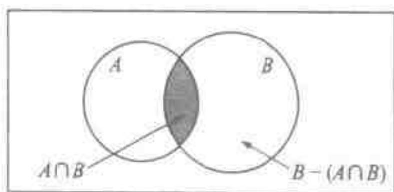


图 1-7

概率计算

1.6 从通常的一副 52 张扑克牌中随机抽一张. 求下列概率: (a)是一张 A, (b)是红心 J, (c)是梅花 3 或方块 6, (d)是一张红心, (e)是一张非红心, (f)一张 10 或黑桃, (g)不是 4 也不是梅花.

解 ☞ 设用 H,S,D,C 分别表示红心, 黑桃, 方块, 梅花, 同时用 $1,2,\cdots,13$ 表示 $A,2,\cdots,K$. 那么 $3\cap H$ 即意味着红心 3, $3\cup H$ 即为三点或红心. 我们使用习题 1.1(b)的样本空间, 每一样本点对应概率为 1/52. 例如 $P(6\cap C)=1/52$.

(a)

$$\begin{aligned}P(1)&=P(1\cap H\text{ 或 }1\cap S\text{ 或 }1\cap D\text{ 或 }1\cap C)\\&=P(1\cap H)+P(1\cap S)+P(1\cap D)+P(1\cap C)\\&=\frac{1}{52}+\frac{1}{52}+\frac{1}{52}+\frac{1}{52}=\frac{1}{13}\end{aligned}$$

这一概率也可用习题 1.1(a)的样本空间算出, 在这样空间中每一样本点有概率 1/13, 特别, A 也如此. 也可以简单地认为有 13 个数, 每个数被抽中的概率为 1/13.

(b) $P(11\cap H)=\dfrac{1}{52}$

(c) $P(3\cap C\text{ 或 }6\cap D)=P(3\cap C)+P(6\cap D)=\dfrac{1}{52}+\dfrac{1}{52}=\dfrac{1}{26}$

(d) $P(H)=P(1\cap H\text{ 或 }2\cap H\text{ 或}\cdots\text{或 }13\cap H)=\dfrac{1}{52}+\dfrac{1}{52}+\cdots+\dfrac{1}{52}=\dfrac{13}{52}=\dfrac{1}{4}$

这一概率也可以注意四种花色牌, 每一种被抽到的概率是 1/4.

(e)用(d)和定理 1-4, 有

$$P(H')=1-P(H)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

(f)由于 10 和 S 不是互斥的, 由定理 1-6, 有

$$P(10\cup S)=P(10)+P(S)-P(10\cap S)=\frac{1}{13}+\frac{1}{4}-\frac{1}{52}=\frac{4}{13}$$

(g)不是 4 也不是梅花的概率记为 $P(4'\cap C')$. 但 $4'\cap C'=(4\cup C)'$, 因此

$$\begin{aligned}P(4'\cap C')&=P[(4\cup C)']=1-P(4\cup C)\\&=1-[P(4)+P(C)-P(4\cap C)]\\&=1-\left[\frac{1}{13}+\frac{1}{4}-\frac{1}{52}\right]=\frac{9}{13}\end{aligned}$$

我们也可以注意这一事件的图示, 它是图 1-8 中圈出的事件的补. 由于这一补事件有 $52-16=36$ 个样本点, 每一样本点给定的概率是 1/52, 所以所求概率为 $36/52=9/13$.

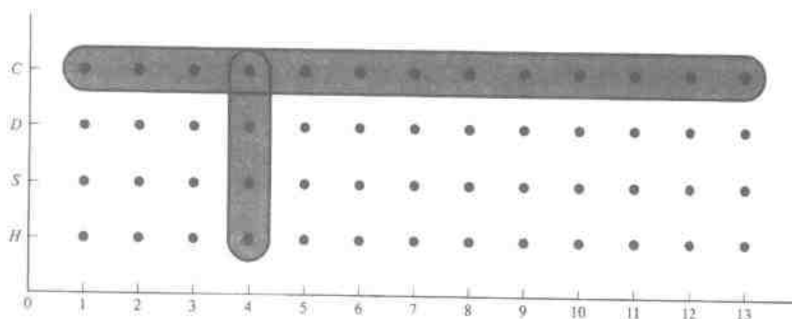


图 1-8

1.7 一个盒中有 6 个红球, 4 个白球, 5 个蓝球, 从中随机抽取一个, 求该球为下列情形的概率: (a)红球, (b)白球, (c)蓝球, (d)非红球, (e)红的或白的.

解 ☞ (a)**模型 1** 用 R,W 和 B 分别表示抽中一个红球, 白球, 蓝球, 则

$$P(R)=\frac{\text{抽选到一个红球的可能情况数}}{\text{抽选一个球的一切可能情况数}}=\frac{6}{6+4+5}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

模型 2　我们的样本空间包含 6+4+5=15 个样本点,给定每一样本点概率为 1/15,因为"取到红球"对应 6 个样本点,所以可以看到有

$$P(R)=6/15=2/5$$

(b)$P(W)=\frac{4}{6+4+5}=\frac{4}{15}$

(c)$P(B)=\frac{5}{6+4+5}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

(d)利用(a),$P(\text{非红球})=P(R')=1-P(R)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

(e)**模型 1**

$$P(\text{红的或白的})=P(R\cup W)=\frac{\text{抽选到一个红球或白球的情况数}}{\text{抽取一个球的一切可能情况数}}$$

$$=\frac{6+4}{6+4+5}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

这也可以用(a)中所用的样本空间计算.

模型 2　由(c),有

$$P(R\cup W)=P(B')=1-P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

模型 3　由于事件 R 和 W 是互斥的,从正文的(4)式可得

$$P(R\cup W)=P(R)+P(W)=\frac{2}{5}+\frac{4}{15}=\frac{2}{3}$$

条件概率和独立事件

1.8　投掷一个正常的骰子,求第一次掷出 4,5,6 而第二次掷出 1,2,3,4 的概率.

解 ☞ 设 A_1 记事件"第一次掷出 4,5 或 6",A_2 记事件"第二次掷出 1,2,3 或 4",我们要求 $P(A_1\cap A_2)$.

模型 1

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=P(A_1)P(A_2)=\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)=\frac{1}{3}$$

这里我们使用了第二次投掷的结果与第一次投掷独立这一事实,即 $P(A_2\mid A_1)=P(A_2)$.同时也用到 $P(A_1)=3/6$(因为 4,5 或 6 是六个等概事件中的 3 个),以及$P(A_2)=4/6$(因为 1,2,3 或 4 是 6 个等概事件中的 4 个).

模型 2　每一骰子在第一次投掷后必出现六种状态之一,第二次投掷也如此,故共有$6\cdot 6=36$ 种等可能的状态.

A_1 中出现的三种状态中的每一种都可与 A_2 中四种状态的每一种配合,这就给出 A_1 和 A_2 一起出现的状态有 $3\cdot 4=12$ 种,所以

$$P(A_1\cap A_2)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

这直接显示 A_1 和 A_2 是独立的,因为

$$P(A_1\cap A_2)=\frac{1}{3}=\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)=P(A_1)P(A_2)$$

1.9　投掷一对正常的骰子两次,求在两次中均得不到 7 点或 11 点的概率.

解 ☞ 图 1-9 显示了掷一对骰子一次的样本空间,例如,(5,2)表示第一个骰子为 5,第二个骰子为 2,骰子是正常的,故每一样本点给定的概率是 1/36.

设 A 是事件"7 或 11",则 A 是图 1-9 中圈出的部分.由于包含 8 个点,有 $P(A)=8/36=2/9$.从而非 7 且非 11 的概率

$$P(A')=1-P(A)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

使用下标 1,2 记第一次和第二次投掷,那么第一次和第二次均不出现 7 点和 11 点的概率为

$$P(A_1')P(A_2'\mid A_1')=P(A_1')P(A_2')$$
$$=\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)=\frac{49}{81}$$

这里使用了各次投掷是相互独立的.

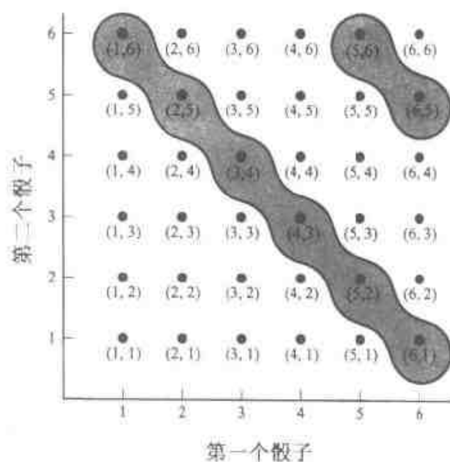


图 1-9

1.10 从洗好的一副 52 张扑克牌中抽取两张.求两张都是 A 的概率.(a)当第一次抽取牌放回时,(b)当不放回时.

解 ☞ **模型1** 设 A_1="第一次抽出 A",A_2="第二次抽出 A".所求概率为

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)$$

(a)由第一次抽时 52 张中有 4 张 A,$P(A_1)=4/52$.对第二次抽,如果牌是放回的,那么也有 $P(A_2|A_1)=4/52$,因为第二次抽时 52 张中仍有 4 张 A.所以

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{52}\right)=\frac{1}{169}$$

(b)和(a)一样 $P(A_1)=4/52$.然而,如果第一次抽中 A,剩下的 51 张中只有 3 张 A,故 $P(A_2|A_1)=3/51$.所以

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right)=\frac{1}{221}$$

模型2 (a)抽第一张牌有 52 种可能状态,由于有放回,抽第二张牌也有 52 种可能状态,故两次共有(52)·(52)种状态.它们是等可能的.

第一次抽中 A 有四种可能状态,第二次抽中 A 也是如此,所以第一次和第二次均抽中 A 的状态有(4)·(4)种.要求的概率为

$$\frac{(4)\cdot(4)}{(52)\cdot(52)}=\frac{1}{169}$$

(b)第一张是从 52 张中抽一张,由于不放回,第二张是从 51 张中抽一张,两次共有(52)·(51)种等可能的状态.

第一次抽中 A 有四种可能状态,第二次再抽中 A 只有三种状态,两次均抽中 A 的状态有(4)·(3)种.要求的概率为

$$\frac{(4)\cdot(3)}{(52)\cdot(51)}=\frac{1}{221}$$

1.11 从习题 1.7 所述的盒子中连续抽三个球.求它们依次为红、白、蓝的概率,(a)有放回,(b)无放回.

解 ☞ 设 R_1="第一次抽中红球",W_2="第二次抽中白球",B_3="第三次抽中蓝球".所求概率为 $P(R_1\cap W_2\cap B_3)$.

(a)如果球是有放回的,那么各事件是独立的.有

$$P(R_1\cap W_2\cap B_3)=P(R_1)P(W_2\mid R_1)P(B_3\mid R_2\cap W_2)$$
$$=P(R_1)P(W_2)P(B_3)$$
$$=\left(\frac{6}{6+4+5}\right)\left(\frac{4}{6+4+5}\right)\left(\frac{5}{6+4+5}\right)=\frac{8}{225}$$

(b)如果球是无放回的,事件是不独立的,有

$$P(R_1\cap W_2\cap B_3)=P(R_1)P(W_2\mid R_1)P(B_3\mid R_1\cap W_2)$$
$$=\left(\frac{6}{6+4+5}\right)\left(\frac{4}{5+4+5}\right)\left(\frac{5}{5+3+5}\right)=\frac{4}{91}$$

1.12 投掷一个骰子两次,求至少出现一个 4 的概率.

解 ☞ 设 A_1="第一次出现 4",A_2="第二次出现 4".则

$$A_1\cup A_2=\text{"第一次出现 4 或第二次出现 4 或两次都是 4"}$$
$$=\text{"至少出现一个 4"}$$

所以所求为 $P(A_1 \cup A_2)$.

模型1 事件 A_1 和 A_2 不是互斥的，但是独立的，因此由(10)和(21)式，有

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{11}{36}\end{aligned}$$

模型2

$$P(\text{至少出现一个 } 4) + P(\text{均不出现 } 4) = 1$$

所以

$$\begin{aligned}P(\text{至少出现一个 } 4) &= 1 - P(\text{均不出现 } 4) \\ &= 1 - P(\text{第一次非 } 4 \text{ 且第二次非 } 4) \\ &= 1 - P(A_1' \cap A_2') = 1 - P(A_1')P(A_2') \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{11}{36}\end{aligned}$$

模型3 两次掷骰子所出现的等可能状态为 $6 \cdot 6 = 36$，同时

A_1 出现而 A_2 不出现的状态数 = 5

A_2 出现而 A_1 不出现的状态数 = 5

A_1, A_2 都出现的状态数 = 1

所以事件 A_1, A_2 至少出现一个的状态数为 $5+5+1=11$，因此 $P(A_1 \cup A_2) = 11/36$.

1.13 一个袋子装有4个白球2个黑球，另一袋子装有3个白球5个黑球. 如果从每一袋中抽一个球，求下列概率：(a)两球都是白的.(b)两球都是黑的.(c)一白球一黑球.

解 ☞ 设 W_1 = 从第一袋中取到白球，W_2 = 从第二袋中取到白球.

(a) $P(W_1 \cap W_2) = P(W_1)P(W_2 \mid W_1) = P(W_1)P(W_2) = \left(\frac{4}{4+2}\right)\left(\frac{3}{3+5}\right) = \frac{1}{4}$

(b) $P(W_1' \cap W_2') = P(W_1')P(W_2' \mid W_1') = P(W_1')P(W_2') = \left(\frac{2}{4+2}\right)\left(\frac{5}{3+5}\right) = \frac{5}{24}$

(c) 所求概率为

$$1 - P(W_1 \cap W_2) - P(W_1' \cap W_2') = 1 - \frac{1}{4} - \frac{5}{24} = \frac{13}{24}$$

1.14 证明定理 1-10.

证明 ☞ 我们对 $n=2$ 证明定理，对较大的 n 值证明方法类似. 设 A 为两个互斥事件 A_1, A_2 中的全部可能结果，则

$$A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2)$$

但是由于 A_1 与 A_2 互斥，故 $A \cap A_1$ 与 $A \cap A_2$ 是互斥的，由公理3，使用(18)式，即得

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) \\ &= P(A_1)P(A \mid A_1) + P(A_2)P(A \mid A_2)\end{aligned}$$

1.15 盒子Ⅰ包含3个红的和2个蓝的弹子，盒子Ⅱ包含2个红的和8个蓝的弹子. 掷一枚均匀硬币，出现正面，则从Ⅰ号盒取一弹子；出现反面，则从Ⅱ号盒取一弹子. 求所取弹子为红色的概率.

解 ☞ 设 R 记"取得一个红弹子"，且以Ⅰ和Ⅱ分别记选中Ⅰ号和Ⅱ号盒. 由于Ⅰ号和Ⅱ号盒均有可能选中，可以使用习题1.14的结果，其中 $A = R, A_1 = \text{Ⅰ}, A_2 = \text{Ⅱ}$. 因此所有弹子为红色的概率为

$$P(R) = P(\text{Ⅰ})P(R \mid \text{Ⅰ}) + P(\text{Ⅱ})P(R \mid \text{Ⅱ}) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{3+2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2+8}\right) = \frac{2}{5}$$

贝叶斯定理

1.16 证明贝叶斯定理(定理1-11).

证明 ☞ 因为 A 是来自互斥事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之一，由定理1-10(习题1.4)，有

因此 $P(A)=P(A_1)P(A\mid A_1)+\cdots+P(A_n)P(A\mid A_n)=\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(A\mid A_j)$

$$P(A_k\mid A)=\frac{P(A_k\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A_k)P(A\mid A_k)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(A\mid A_j)}$$

1.17 设在习题1.15中,掷币者没有说明掷出的是正面还是反面(故不知道弹子是从哪一盒子取出的),但是知道取出的是红色的,问该弹子来自Ⅰ号盒的概率(也就是硬币出现正面的概率)?

解 ☞ 使用习题1.15中相同的符号,即 $A=R$, $A_1=\text{Ⅰ}$, $A_2=\text{Ⅱ}$.现在求给定取出的是红弹子时,盒Ⅰ被选中的概率.使用贝叶斯定理,其中 $n=2$,这一概率给定为

$$P(\text{Ⅰ}\mid R)=\frac{P(\text{Ⅰ})P(R\mid\text{Ⅰ})}{P(\text{Ⅰ})P(R\mid\text{Ⅰ})+P(\text{Ⅱ})P(R\mid\text{Ⅱ})}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{3+2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{3+2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2+8}\right)}=\frac{3}{4}$$

组合分析,计数,树形图

1.18 从劳动部,管理部,公关部各派一个代表,组成一个三人委员会.如果劳动部派代表有三种可能,管理部有两种,公关部有四种.试确定共可以有多少种不同的委员会.(a)使用基本的计数原则.(b)使用树形图.

解 ☞ (a)从劳动部选代表有3种方式,再从管理部选代表有2种,这样从劳动部和管理部确定代表就有 $3\cdot2=6$ 种.对每一种又可以有4种不同的公关部代表,因此,不同的委员会的数目应为 $3\cdot2\cdot4=24$.

(b)用 L_1,L_2,L_3 记3个劳动部代表,用 M_1,M_2 记管理部代表,用 P_1,P_2,P_3,P_4 记公关部代表.图1-10显示了全部24种不同的委员会.从该图可以列出全部不同的委员会组成,即 $L_1M_1P_1$, $L_1M_1P_2$,等等.

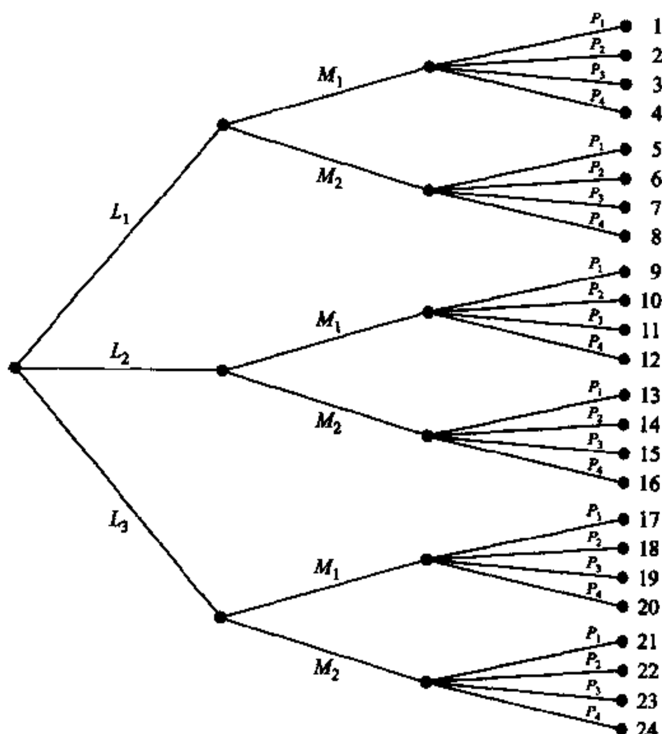


图1-10

排列

1.19 将五种不同的颜色的弹子排成一行，共有多少种状态.

解 ☞ 我们在一线5个点排5个弹子.第一个点所以用5个弹子中的任一个去占据，也就是第一个位置有5种可能状态，做完这一步后，第二个位置有四种放法，第三个有三种，第四个有二种，最后一个只有1种.因此，

$$\text{一行 5 个弹子的安排数} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$$

一般情形，

$$\text{一行 } n \text{ 个不同物体的安排数} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = n!$$

这也称为一次取 n 个，n 个不同物体的排列数，记为 ${}_nP_n$.

1.20 一条板凳仅有4个位置，现在10个人去坐，共有多少种可能的坐法.

解 ☞ 第一个位置可由10个人中的任一个去坐，第一个坐定后，第二个位置有九种坐法，第三个位置有八种，第四个位置有七种，因此，

$$\text{10 人中一次取 4 人的安排数} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

一般情况，

$$n \text{ 个不同物体中一次取 } r \text{ 个的安排数} = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

这也称为 n 个不同物体一次取 r 个的排列数，记为 ${}_nP_r$. 注意当 $r = n$ 时，即为习题 1.19 中的 ${}_nP_n = n!$.

1.21 列出(a) ${}_8P_3$，(b) ${}_6P_4$，(c) ${}_{15}P_1$，(d) ${}_3P_3$.

解 ☞ (a) ${}_8P_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$，(b) ${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$，(c) ${}_{15}P_1 = 15$，(d) ${}_3P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

1.22 5个男人和4个女人坐成一行，要求女士占据偶数位置，求共有多少种这样的安排方式.

解 ☞ 男士可能的坐法有 ${}_5P_5$，女士有 ${}_4P_4$，每一种男士的安排可以和每一种女士安排配合.因此

$$\text{总安排数} = {}_5P_5 \cdot {}_4P_4 = 5!\ 4! = 120 \times 24 = 2880$$

1.23 从数字0，1，2，3，…，9能构成多少个4位数.(a)允许数字重复，(b)不允许数字重复，(c)末位数是零且不允许数字重复.

解 ☞ (a)第一个数字可以是9个中任一个(因为0不行)，第二、三、四个数字可以是10个中的任一个，所以，$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ 种.

(b)第一个数字可以是9中之一(0除外)

第二个数字可以是9中之一(除第一个数字)

第三个数字可以是8中之一(除前两个数字)

第四个数字可以是7中之一(除前三个数字)

所以，共 $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ 种.

另解 第一个数字为9中之一，剩下3个数位选择方式为 ${}_9P_3$，所以 $9 \cdot {}_9P_3 = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ 种.

(c)第一个数字有9种，第二个数字有8种，第三个数字有7种，所以有 $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ 种.

另解 第一个数字有9种，接下的两个数位有 ${}_8P_2$ 种，所以 $9 \cdot {}_8P_2 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ 种.

1.24 在一个书架上排放有4本不同的数学书，6本不同的物理书，两本不同的化学书.问共有多少种排放方法，(a)每种主题的书必须放在一起，(b)仅有数学书必须放在一起.

解 ☞ (a)数学书自身有 ${}_4P_4 = 4!$ 种排放方式，物理书有 ${}_6P_6 = 6!$ 种，化学书有 ${}_2P_2 = 2!$ 种.而这三群间有 ${}_3P_3 = 3!$ 种放法.因此

$$\text{总的排放方式数} = 4!6!2!3! = 207\ 360$$

(b)考虑4本数学书作一个整体大书，如此有9本书在排放，排放数为 ${}_9P_9 = 9!$ 种.对其中的每一种，在一起的数学书自身有 ${}_4P_4 = 4!$ 种排放方式.因此

$$\text{总的排放方式数} = 9!\ 4! = 8\ 709\ 120$$

1.25 5个红弹子，2个白弹子，3个蓝弹子排成一行，如果同色的弹子相互没有区别.求全部

可能的安排数.

解 ☞ 假定存在 N 种不同的安排,则 N 乘以(a)5 个红弹子自身的排列方式数,(b)2 个白弹子的排列数,(c)3 个蓝弹子的排列数(也就是用 5!2!3! 乘 N),我们就得到 10 个各不相同的弹子的排列数 10!.因此

$$(5!2!3!)N = 10! \qquad N = 10!/(5!2!3!)$$

一般,n 个物体中分别有 n_1 个相同,n_2 个相同,…,n_k 个相同,$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$,则这 n 个物体不同的排列方式数为 $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$.

1.26 7 个人坐成一圆圈共有多少种坐法,(a)他们可以随意坐,(b)其中二人必须靠在一起.

解 ☞ (a)设固定其中的一个人,则剩下的 6 个人能有 6! =720 种坐法,这就是 7 个人坐成一圈的总的安排方式数.

(b)将特殊的 2 个人考虑成一个人,那么 6 个人坐一圈共有 5! 种方式,但是所考虑的 2 个人又有 2! 种安排方式.因此,7 个人坐一圈,其中二人必须靠在一起的安排方式数为 5! 2! =240.

组合

1.27 10 个物体分成 4 个和 6 个的两群有多少种方式?

解 ☞ 这个数与 4 个物体相同,另 6 个物体相同的 10 个物体的安排方式数一样,由习题 1.25,此数为 $\dfrac{10!}{4!6!}=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4!}=210$.

这个问题等价于从 10 个物体中取出 4 个(或取出 6 个),不计次序.一般,n 个物体中取 r 个的数目称为 n 中一次取 r 的组合数,记为 ${}_nC_r$ 或 $\binom{n}{r}$,有

$${}_nC_r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{{}_nP_r}{r!}$$

1.28 计算(a)${}_7C_4$,(b)${}_6C_5$,(c)${}_4C_4$.

解 ☞ (a)${}_7C_4=\dfrac{7!}{4!\ 3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$

(b)${}_6C_5=\dfrac{6!}{5!\ 1!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{5!}=6$ 或 ${}_6C_5={}_6C_1=6$

(c)${}_4C_4$ 是从 4 物体中一次取 4 个的选取数,仅有一种取法,所以 ${}_4C_4=1$.如果约定 0! =1,就可按算式有

$${}_4C_4=\frac{4!}{4!\ 0!}=1$$

1.29 从 9 个人中选出 5 个人组成一委员会,有多少种方法?

解 ☞
$$\binom{9}{5}={}_9C_5=\frac{9!}{5!\ 4!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{5!}=126$$

1.30 从 5 个数学家、7 个物理学家中选出 2 个数学家、3 个物理学家,构成一个委员会,有多少种方法.(a)任何数学家和物理学家均可以,(b)一个指定的物理学家必须在委员会中,(c)两个指定的数学家不能参加委员会.

解 ☞ (a)5 个数学家选 2 个有 ${}_5C_2$ 种,7 个物理学家选 3 个有 ${}_7C_3$ 种,

$$\text{可能的总数}={}_5C_2\cdot{}_7C_3=10\cdot35=350$$

(b)5 个数学家选两个有 ${}_5C_2$ 种,6 个物理学家选两个有 ${}_6C_2$ 种,

$$\text{可能的总数}={}_5C_2\cdot{}_6C_2=10\cdot15=150$$

(c)3 个数学家选两个有 ${}_3C_2$ 种,7 个物理学家选三个有 ${}_7C_3$ 种.

$$\text{可能的总数}={}_3C_2\cdot{}_7C_3=3\cdot35=105$$

1.31 用莴苣、野生菊苣、卷叶菊苣、水芹、蓝花菊苣共可做出多少种不同的沙拉.

解 ☞ 每一种植物有两种处理方式,选用或不选用.由于任一种植物的两种处理方式均可与其他植物的两种处理方式配合,故五种植物处理方式总数为 2^5 种.但是 2^5 中包括了什么植物也不用.因此

$$\text{沙拉的种数} = 2^5 - 1 = 31$$

另解 人们可以从五种植物中选用一种、二种、…、五种，因此所求沙拉数为

$$_5C_1 + {_5C_2} + {_5C_3} + {_5C_4} + {_5C_5} = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

一般，对任一正整数 n，$_nC_1 + {_nC_2} + {_nC_3} + \cdots + {_nC_n} = 2^n - 1$.

1.32 从 7 个辅音和 5 个元音字母中，能选出多少个包括 4 个不同辅音、3 个不同元音的词（不管该词是否有意义）.

解 ☞ 4 个不同辅音有$_7C_4$种选择，3 个不同元音有$_5C_3$种选择，所选 7 个字母有$_7P_7 = 7!$ 种安排方式，所以

$$\text{词的总数} = {_7C_4}\cdot{_5C_3}\cdot 7! = 35\cdot 10\cdot 5040 = 1\ 764\ 000$$

二项系数

1.33 证明$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$.

证明 ☞ 我们有

$$\begin{aligned}\binom{n}{r} &= \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!(n-r)!}\\ &= \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!}\\ &= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}\\ &= \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}\end{aligned}$$

上述结果有下面的一个有趣的应用. 如果对 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 列出 $(x+y)^n$ 的二项展开式的系数，可以得到称为帕斯卡三角的排列阵.

$n = 0$ 1

$n = 1$ 1 1

$n = 2$ 1 2 1

$n = 3$ 1 3 3 1

$n = 4$ 1 4 6 4 1

$n = 5$ 1 5 10 10 5 1

$n = 6$ 1 6 15 20 15 6 1

等等

可以看到任意一行的一个数是上面一行该数左、右上角两个数之和，例如 $10 = 4 + 6$，$15 = 10 + 5$，等等.

1.34 找出$\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{12}$的展开式的常数项.

解 ☞ 根据二项定理

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}(x^2)^k\left(\frac{1}{x}\right)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}x^{3k-12}$$

常数项对应的是 $3k - 12 = 0$ 的项，即 $k = 4$，因此该项为

$$\binom{12}{4} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 495$$

运用组合分析的问题

1.35 一个盒中装有 8 个红球、3 个白球、9 个蓝球. 如果无放回随机抽取 3 个球，确定下列概率：(a)3 个都是红的，(b)3 个都是白的，(c)两个红的和一个白的，(d)至少一个白的，(e)每一种颜色一个球，(f)依次抽出红、白、蓝球.

解 ☞ (a)**方法 1** 设 R_1, R_2, R_3 分别为“第一次抽出红球”，“第二次抽出红球”，“第三次抽出红

球".则"三个都是红的"即为 $R_1\cap R_2\cap R_3$,因此有

$$P(R_1\cap R_2\cap R_3)=P(R_1)P(R_2\mid R_1)P(R_3\mid R_1\cap R_2)$$
$$=\frac{8}{20}\times\frac{7}{19}\times\frac{6}{18}=\frac{14}{285}$$

方法 2

$$\text{所求概率}=\frac{8\text{个红球中取出3个球的数目}}{20\text{个球中取出3个球的数目}}=\frac{{}_8C_3}{{}_{20}C_3}=\frac{14}{285}$$

(b)使用(a)中的第二种方法,可得

$$P(3\text{个都是白的})=\frac{{}_3C_3}{{}_{20}C_3}=\frac{1}{1140}$$

用(a)中的第一种方法也类似.

(c)

$$P(\text{两个红的和一个白的})$$
$$=\frac{(8\text{个红球中取2个的数目})(3\text{个白球中取1个的数目})}{20\text{个球中取出3个球的数目}}$$
$$=\frac{({}_8C_2)({}_3C_1)}{{}_{20}C_3}=\frac{7}{95}$$

(d)$P(\text{没有白球})=\frac{{}_{17}C_3}{{}_{20}C_3}=\frac{34}{57}$,所以

$$P(\text{至少一个白的})=1-\frac{34}{57}=\frac{23}{57}$$

(e)$P(\text{每种颜色一个球})=\frac{({}_8C_1)({}_3C_1)({}_9C_1)}{{}_{20}C_3}=\frac{18}{95}$

(f)利用(e)

$$P(\text{依次抽出红、白、蓝球})=\frac{1}{3!}P(\text{每种颜色一个球})=\frac{1}{6}\times\frac{18}{95}=\frac{3}{95}$$

另解

$$P(R_1\cap W_2\cap B_3)=P(R_1)P(W_2\mid R_1)P(B_3\mid R_1\cap W_2)$$
$$=\frac{8}{20}\times\frac{3}{19}\times\frac{9}{18}=\frac{3}{95}$$

1.36 一种扑克游戏,从 52 张洗好的牌中抽出 5 张,求下列概率:(a)有 4 张 A,(b)4 张 A 和 1 张 K,(c)3 张 10 和 2 张 J,(d)9,10,J,Q,K 各一张,次序不论,(e)3 张同一花色另 2 张同一花色,(f)至少有 1 张 A.

解 ☞ (a)

$$P(\text{有4张}A)=\frac{({}_4C_4)({}_{48}C_1)}{{}_{52}C_5}=\frac{1}{54\ 145}$$

(b)

$$P(4\text{张}A\text{和1张}K)=\frac{({}_4C_4)({}_4C_1)}{{}_{52}C_5}=\frac{1}{649\ 740}$$

(c)

$$P(3\text{张10和2张}J)=\frac{({}_4C_3)({}_4C_2)}{{}_{52}C_5}=\frac{1}{108\ 290}$$

(d)

$$P(9,10,J,Q,K\text{各一张,次序不论})$$
$$=\frac{({}_4C_1)({}_4C_1)({}_4C_1)({}_4C_1)({}_4C_1)}{{}_{52}C_5}=\frac{64}{162\ 435}$$

(e)第一种花色有 4 种,第二种花色有 3 种,故

$$P(3\text{张同一花色另2张同一花色})=\frac{(4\cdot{}_{13}C_3)(3\cdot{}_{13}C_2)}{{}_{52}C_5}=\frac{429}{4\ 195}$$

(f)

$$P(\text{无}A)=\frac{{}_{48}C_5}{{}_{52}C_5}=\frac{35\ 673}{54\ 145}$$

所以

$$P(\text{至少有 1 张 } A)=1-\frac{35\ 673}{54\ 145}=\frac{18\ 472}{54\ 145}$$

1.37　掷一枚均匀骰子，求恰出现 3 个 6 点的概率.

解　☞ 用 5 个位置— — — — —表示 5 次投掷，每一个位置都可以发生出现 6 点和不出现 6 点(6′)的事件. 例如，3 个 6 点和 2 个非 6 点可以是 666′66′或 66′666′等等.

现在投掷是独立的，所以出现结果 666′66′的概率为

$$P(666'66')=P(6)P(6)P(6')P(6)P(6')=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

对其他出现 3 个 6 和两个非 6 的结果，类似地有

$$P=\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

但是这样的结果共有${}_5C_3=10$ 种，且它们是互斥的，因此，所求概率为

$$P(666'66' \text{ 或 } 66'66'6 \text{ 或 } \cdots)={}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{125}{3\ 888}$$

一般，如果 $p=P(A)$，$q=1-p=P(A')$，根据上述的理由，n 次独立试验中恰有 x 次得到 A 的概率为

$${}_nC_xp^xq^{n-x}=\binom{n}{x}p^xq^{n-x}$$

1.38　一个书架上有 6 本数学书和 4 本物理书，求 3 本指定的数学书放在一起的概率.

解　☞ 全部书的排列共有${}_{10}P_{10}=10!$ 种. 我们将 3 本指定的书看作一本，那么共有 8 本书全部排列法共有${}_8P_8=8!$ 种. 但是 3 本数学书内部有${}_3P_3=3!$ 种排法，所求概率为

$$\frac{8!\ 3!}{10!}=\frac{1}{15}$$

综合问题

1.39　A 和 B 弈棋 12 盘，A 胜 6 盘，B 胜 4 盘，2 盘为和棋. 现在他们约定再弈 3 盘以决胜负. 求下列概率：(a)A 胜全部 3 盘，(b)2 盘和棋，(c)A 和 B 交替获胜，(d)B 至少胜一盘.

解　☞ 设 A_1,A_2,A_3 分别记 A 在第一，第二，第三盘获胜；B_1,B_2,B_3 分别记 B 在第一，第二，第三盘获胜. 以他们已经对弈的 12 盘为基础，我们可以假定(经验概率)

$$P(A\text{ 在某一盘获胜})=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},P(B\text{ 在某一盘获胜})=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

(a)假定每一盘的结果是相互独立的(如果游戏者有胜负的心理影响，这一假定将是不恰当的).

$$P(A\text{ 胜全部 3 盘})=P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$

(b)任一盘中不是和棋的概率(也就是 A 或 B 获胜的概率)为 $q=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$，和棋的概率为 $p=1-q=\frac{1}{6}$. 所以三盘中有两盘和棋的概率(参看习题 1.37)为

$$\binom{3}{2}p^2q^{3-2}=3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{72}$$

(c)

$$\begin{aligned}&P(A\text{ 和 }B\text{ 交替获胜})\\&=P(A\text{ 胜再 }B\text{ 胜再 }A\text{ 胜，或者 }B\text{ 胜再 }A\text{ 胜再 }B\text{ 胜})\\&=P(A_1\cap B_2\cap A_3)+P(B_1\cap A_2\cap B_3)\\&=P(A_1)P(B_2)P(A_3)+P(B_1)P(A_2)P(B_3)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{36}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P(B\text{ 至少胜一盘}) &= 1 - P(B\text{ 一盘不胜}) \\ &= 1 - P(B_1' \cap B_2' \cap B_3') \\ &= 1 - P(B_1')P(B_2')P(B_3') \\ &= 1 - \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{19}{27} \end{aligned}$$

1.40 A 和 B 玩一种游戏,他们交替掷一对骰子,谁第一得到 7 点即获胜,求下列概率:(a)第一个投掷者获胜,(b)第二个投掷者获胜.

解 (a)在一次投掷一对均匀的骰子时,如习题 1.9 中图 1-9 所示,掷出 7 点的概率为$\frac{1}{6}$.假定 A 第一个掷,那么出现下列情形时,A 将获胜,容易列出相应的概率,

(1)A 在第一掷获胜,概率为$\frac{1}{6}$.

(2)A 第一掷失败,B 掷失败,A 再掷获胜,概率为$\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)$.

(3)A 第一掷失败,B 失败,A 失败,B 失败,A 获胜,概率为$\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)$……

因此 A 获胜的概率为

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{6}\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \cdots\right] = \frac{1/6}{1-(5/6)^2} = \frac{6}{11} \end{aligned}$$

上式中用到附录 A 中结论 6,其中 $x = (5/6)^2$.

(b)类似地 B 在游戏中获胜的概率为

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \cdots &= \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \cdots\right] \\ &= \frac{5/36}{1-(5/6)^2} = \frac{5}{11} \end{aligned}$$

因此可以得到第一个投掷者获胜具有 6 对 5 的优势比.注意,由于

$$\frac{6}{11} + \frac{5}{11} = 1$$

没有胜负的概率是零.如果投掷的次数是有限制的,这个概率将不是零.参看习题 1.100.

1.41 一台机器一天生产 12 000 只螺钉,其中有 3% 的次品.求随机取出的 600 只螺钉中有 12 只次品的概率.

解 12 000 只螺钉的 3%,即 360 只为次品,11 640 只为正品.所以

$$\text{所求概率} = \frac{{}_{360}C_{12} \cdot {}_{11\,640}C_{588}}{{}_{12\,000}C_{600}}$$

1.42 一个盒子有 5 个红弹子、4 个白弹子,从盒中无放回地连续抽取两个弹子,现已注意到第二个是白的,求第一个也是白弹子的概率.

解 **方法 1** 如果 W_1, W_2 分别记事件"在第一次取出白的","在第二次取出白的".所求为 $P(W_1 | W_2)$.可给出

$$P(W_1 | W_2) = \frac{P(W_1 \cap W_2)}{P(W_2)} = \frac{(4/9)\times(3/8)}{4/9} = \frac{3}{8}$$

方法 2 因为第二次取出是白的,第一次可以抽取的仅是剩下的 8 个中的 3 个,所以这个概率是3/8.

1.43 一个丈夫和一个妻子从现在起可再活 20 年的概率分别为 0.8 和 0.9.求下列概率:(a)两人一起活 20 年,(b)在 20 年中两人均死亡,(c)至少有一人活 20 年.

解 设 H 和 W 分别表示丈夫和妻子将活 20 年,那么 $P(H) = 0.8$, $P(W) = 0.9$.我们假定 H 和 W 是独立事件.当然这可能合理也可能不合理.

(a) $P(\text{两人一起活 20 年}) = P(H \cap W) = P(H)P(W) = 0.8 \times 0.9 = 0.72$

(b)
$$\begin{aligned} P(\text{在 20 年中两人均死亡}) &= P(H' \cap W') = P(H')P(W') \\ &= 0.2 \times 0.1 = 0.02 \end{aligned}$$

(c) P(至少有一人活 20 年) $= 1 - P$(在 20 年中两人均死亡) $= 1 - 0.02 = 0.98$

1.44 一个无能的秘书将 n 封信随机地放进了 n 个信封,求至少有一封信投放正确的概率.

解 ☞ 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是第一封信,第二封信,……,第 n 封信投放正确的事件.那么事件至少有一封投放正确是 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$,要求 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$.从(10)和(11)式的结果的推广式,有

(1) $$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum P(A_k) - \sum P(A_j \cap A_k) + \sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

其中,$\sum P(A_k)$ 是 A_k 的概率从 1 到 n 的和,$\sum P(A_j \cap A_k)$ 是 $A_j \cap A_k$ 的概率中 j 和 k 从 1 到 n 且 $k > j$ 的和,等等.例如,由于 n 封信的每一个仅有一个正确的信封,故有

(2) $$P(A_1) = \frac{1}{n},\text{类似地有 } P(A_k) = \frac{1}{n}$$

同时当第一封投放正确时,剩下的 $n-1$ 封的任一个在 $n-1$ 个信封仅有一个是正确的.有

(3) $$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)$$

类似地可求得

(4) $$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n-2}\right)$$

等等.最后可求得

(5) $$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right) \cdots \left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{n!}$$

现在可以看到在(3)给出的和 $\sum P(A_j \cap A_k)$ 中共有 $\binom{n}{2} = {}_nC_2$ 项,类似地在(4)给出的和 $\sum P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ 中共有 $\binom{n}{3} = {}_nC_3$ 项.因此所求概率为

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right) - \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right) + \binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n-2}\right) \\ &\quad - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\left(\frac{1}{n!}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \end{aligned}$$

从已有的计算公式(参看附录 A)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

取 $x = -1$,有

$$e^{-1} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots\right)$$

或

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots = 1 - e^{-1}$$

如果 n 很大,则所求概率非常接近 $1 - e^{-1} = 0.6321$.这意味着至少有一封信投放正确的机会还相当不错.一般在 $n > 10$ 时,可以利用这个值作为概率.那么无论 n 是 10 或 10 000,至少有一封信投放正确的概率实际上基本相同.

1.45 求随机地选择的 n 个人($n < 365$)有 n 个不同的生日的概率.

解 ☞ 我们假定一年仅有 365 天,且全部生日都是等可能的.当然这一假定并不一定完全符合实际情况.

n 个人中的第一个以随便的一天为生日的概率为 $365/365 = 1$.那么第二个有不同的生日,只能是 364 天中的一天,因此第二个有与第一个不同生日的概率为 $364/365$.类似地第三个有与前两个不同生日的概率为 $363/365$.最后第 n 个有与前面的人不同生日的概率为 $(365 - n + 1)/365$.因此有

$$\begin{aligned} P(n \text{ 个生日均不同}) &= \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \cdots \cdot \frac{365 - n + 1}{365} \\ &= \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \end{aligned}$$

1.46 如果在习题 1.45 中,要求不同生日的概率小于 1/2,求需要多少人?

解 ☞ 用 p 记对应的概率,取自然对数,有

(1) $$\ln p=\ln\left(1-\frac{1}{365}\right)+\ln\left(1-\frac{2}{365}\right)+\cdots+\ln\left(1-\frac{n-1}{365}\right)$$

但从已知的公式(参看附录 A,公式 7),有

(2) $$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$$

因而(1)可以写成

(3) $$\ln p=-\left[\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{365}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{(365)^2}\right]-\cdots$$

再对 $n=2,3,\cdots$ 使用下列公式(参看附录 A,公式 1,2)

(4) $$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},\quad 1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

从(3)可以得到

(5) $$\ln p=-\frac{n(n-1)}{730}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{12(365)^2}-\cdots$$

对小于 365 的 n 值,比如 $n<30$,(5)中右端的第二项和更高阶项与第一项相比是可以忽略的,这样可以得到一个很好的近似

(6) $$\ln p=\frac{n(n-1)}{730}$$

对 $p=\frac{1}{2}$,$\ln p=-\ln 2=-0.693$,因此有

(7) $$\frac{n(n-1)}{730}=0.693 \quad 或 \quad n^2-n-506=0 \quad 或 \quad (n-23)(n+22)=0$$

所以 $n=23$.因此可以得到下列结论:当 n 比 23 大时,其中至少 2 人有相同的生日这一事件更具有优势.

补充习题

概率的计算

1.47 对下列事件确定概率 p 或它的估计.

(a)从一副洗好的扑克牌中抽取一张,出现 K 或 A 或梅花 J 或方块 Q.

(b)掷一对骰子一次,出现 8 点.

(c)如果检查了 600 个螺钉,其中 12 个是次品,下一个发现是正品.

(d)掷一对骰子一次,出现 7 点或 11 点.

(e)掷一枚均匀硬币三次,至少出现一次正面.

1.48 从一副洗好的扑克牌中连续抽三张.设 A_1 是事件"第一次抽中 K",A_2 是"第二次抽中 K",A_3 是"第三次抽中 K".用语言描述下列式子的意义.

(a)$P(A_1\cap A_2')$, (b)$P(A_1\cup A_2)$, (c)$P(A_1'\cup A_2')$,

(d)$P(A_1'\cap A_2'\cap A_3')$, (e)$P[(A_1\cap A_2)\cup(A_2'\cap A_3)]$.

1.49 一个盒子中有 10 个红弹子,30 个白弹子,20 个蓝弹子和 15 个橙弹子,随机地从中抽取一个,求下列概率:(a)橙色或红色,(b)非红色和蓝色,(c)非蓝色,(d)白色,(e)红色、白色或蓝色.

1.50 从习题 1.49 的盒子中有放回地抽取两个弹子,求下列概率:(a)两个都是白色,(b)第一个是红色第二个是白色,(c)都不是橙色,(d)是红色或白色或二种颜色都有,(e)第二个一是蓝色,(f)第一个是橙色,(g)至少一个是蓝色,(h)至多一个是红色,(i)第一个是白色但第二个不是,(j)仅有一个红色.

1.51 如果习题 1.50 中抽取是无放回的,求那些概率.

条件概率和独立事件

1.52 一个盒子中有 2 个红色和 3 个蓝色的弹子,无放回地随机抽取 2 个,求下列概率:(a)2个都是蓝色,(b)2 个都是红色,(c)1 个红色和 1 个蓝色.

1.53 求从 52 张扑克牌中随机抽出 3 张 A 的概率.(a)有放回,(b)无放回.

1.54 如果在一个有 2 个孩子的家庭中,已知至少有一个是男孩,求两个都是男孩的概率.

1.55 盒子Ⅰ有 3 个红球和 5 个白球,盒子Ⅱ有 4 个红球和 2 个白球.从第一个盒子中随机地取出一个,不看

颜色放入第二个盒子中.再从第二个盒子中取一个球.求该球是白球的概率.

贝叶斯定理

1.56 一个盒子有 3 个蓝弹子和 2 个红弹子,第二个盒子有 2 个蓝的和 5 个红的,随机地从一个盒子中抽出一个弹子,发现它是蓝的,求该弹子来自第一个盒子的概率?

1.57 有三个不同的珠宝盒,每个有两个抽屉.在第一只盒子中,每个抽屉有一块金表.在第二只盒子中,每个抽屉有一块银表.在第三只盒子中,一个抽屉放有一块金表,另一个抽屉放有一块银表.现随机地选择一只盒子,打开一个抽屉,发现其中装的是一块银表,求另一个抽屉装的是金表的概率.

1.58 罐子Ⅰ有 2 个白的和 3 个黑的球,罐子Ⅱ有 4 个白的和 1 个黑的球,罐子Ⅲ有 3 个白的和 4 个黑的球.今随机地取一个罐子并随机地从中取出一个球,发现它是白的.求该球来自罐子Ⅰ的概率?

组合分析、计数、树形图

1.59 投掷一枚硬币三次,用树形图确定各种可能发生的结果.

1.60 从一副 52 张扑克牌中,无放回随机地抽取三张,求下列各状况的可能数目:(a)相继抽取一张方块、一张梅花和一张红心,(b)抽出两张红心然后是一张梅花或黑桃.

1.61 将三枚不同的硬币放入两个不同的钱包,共有多少种放法.

排列

1.62 计算:(a)${}_4P_2$,(b)${}_7P_5$,(c)${}_{10}P_3$.

1.63 当 n 为何值时,有 ${}_{n+1}P_3 = {}_nP_4$?

1.64 5 个人去坐仅有 3 个位置的沙发,共有多少种坐法?

1.65 在下列情形下,7 本书排在一书架上有多少种排法.(a)任一种安排都可以,(b)三本指定的书必须放在一起,(c)两本指定的书必须放在两端.

1.66 用数字 1,2,3,…,9 能组成多少种不同数字的五位数,(a)该五位数是奇数,(b)该五位数第一位、第二位必须是偶数.

1.67 如果数字可以重复,解习题 1.66.

1.68 用 3 个 4、4 个 2、2 个 3,可以构成多少个不同的三位数.

1.69 三个男士和三个女士坐成一个圆圈,有多少种坐法.如果(a)没有限制,(b)两位指定的女士不能坐在一起,(c)每位女士必须坐在两个男士之间.

组合

1.70 计算(a)${}_5C_3$,(b)${}_8C_4$,(c)${}_{10}C_8$.

1.71 当 n 为何值时,有 $3\cdot{}_{n+1}C_3 = 7\cdot{}_nC_2$?

1.72 从 10 个问题中选出 6 个有多少种.

1.73 从 8 个男人和 6 个女人中,选出由 3 个男人和 4 个女人组成的委员会,共有多少种组合方法.

1.74 从 6 个男人、8 个女人、4 个男孩和 5 个女孩中,选出 2 个男人、4 个女人、3 个男孩和 3 个女孩,有多少选法.如果(a)没有限制,(b)一个指定的男人和一个指定的女人必须被选中.

1.75 一个 10 人的群体分成下列状态,有多少种分法.(a)分成 7 个和 3 个的两群体,(b)分成 5 个、3 个和 2 个的三群体.

1.76 从 5 个统计学家和 6 个经济学家中,选出 3 个统计学家和 2 个经济学家组成一个委员会,有多少种不同的状态.如果(a)没有限制,(b)2 个指定的统计学家必须参加委员会,(c)一个指定的经济学家不能参加委员会.

1.77 从单词 Tennessee 中取四个字母,(a)不计字母排放次序的组合数,(b)计算排放次序的排列数,各有多少.

二项系数

1.78 计算(a)${}_6C_3$,(b)$\binom{11}{4}$,(c)$({}_8C_2)({}_4C_3)/{}_{12}C_5$.

1.79 展开(a)$(x+y)^6$,(b)$(x-y)^4$,(c)$(x-x^{-1})^5$,(d)$(x^2+2)^4$.

1.80　求$\left(x+\frac{2}{x}\right)^9$中$x$项的系数.

用组合分析求概率

1.81　投掷一对骰子两次,求出现7点的概率,(a)出现一次,(b)至少一次,(c)两次.

1.82　从洗好的52张扑克牌中,随机地连续抽取两张,求下列概率:(a)第一张牌不是梅花10或一张A,(b)第一张是A而第二张不是,(c)至少有一张方块,(d)两张牌有不同的花色,(e)有人像的牌(J,Q,K)不超过一张,(f)第二张牌不是人像牌,(g)给定第一张是人像牌而第二张不是,(h)两张牌是人像牌或者黑桃.

1.83　一个盒子装有1至9数码的9张标签,从中一次抽取一张共三张标签,求它们是奇、偶、奇或偶、奇、偶两种交替状况的概率.

1.84　在一盘棋中,A对B有3:2的获胜优势比,如果共下三盘.(a)三盘中A至少获胜两盘的优势比是多少,(b)A在前两盘不负于B相对于在前两盘即告负的优势比.

1.85　在桥牌游戏中,4个参与者均从洗好的52张牌中获得13张,求一个指定的参与者获得下列状态的概率,(a)7张方块、2张梅花、3张红心和1张黑桃,(b)全部同花色.

1.86　一个罐子有8个红弹子和8个蓝弹子,从中无放回地取出5个弹子,求恰为3个红弹子和2个蓝弹子的概率.

1.87　(a)掷一对骰子三次,求至少一次出现7点的概率,(b)要使(a)中事件的概率大于0.95,需要掷多少次.

1.88　从52张扑克牌中抽取3张,求下列概率,(a)全部牌是一种花色,(b)至少抽到两个A.

1.89　求一个桥牌参与者在13张牌中有9张是同一种花色的概率.

综合问题

1.90　一个样本空间有三个样本点,其对应概率分别为$2p,p^2,4p-1$.求p值.

1.91　由5个字母能排成多少个词.如果要求(a)全部字母均不相同,(b)有两个字母相同,(c)全部字母均不相同,且有两个指定字母不得相邻.

1.92　从0至9中随机地选择4个数,求下列概率.(a)它们全不相同,(b)相同的数不超过2个.

1.93　重复掷一对骰子,求在第六次掷时,第一次出现11点的概率.

1.94　为了使习题1.93中第一次出现11点的概率大于下列值,至少应掷多少次:(a)0.5,(b)0.95?

1.95　从扑克游戏中,求下列概率:(a)五张为10,J,Q,K,A同花大顺,(b)五张为三张相同且另两张相同(例如三张10两张J),(c)五张牌都不相同,(d)五张中有四张A.

1.96　一个人击中目标的概率为$\frac{2}{3}$,如果他射击直到击中为止,求他将在第五次射击时,第一次击中目标的概率.

1.97　(a)一个格子分成6个空间,将4个不可区分的弹子放入这些空间,有多少种放法.(b)如果有n个空间,r个弹子,求(a)的解,这种类型的问题在物理中涉及玻色-爱因斯坦(Bose-Einstein)统计.

1.98　(a)一个格子分成6个空间,将12个不可区分的弹子放入这些空间,要求没有一个空间是空的,问有多少种放法?(b)如果有n个空间,r个弹子($r>n$),求(a)的解,这种类型的问题在物理中涉及费米-狄拉克(Fermi-Dirac)统计.

1.99　一个扑克牌游戏者现有2,3,4,6,8五张牌,他希望打出8后再替换进一张5(使得成为一副顺子).当其他三人一起的牌为下列状况时,此人能够成功的概率是多少?(a)有一张5,(b)有两张5,(c)有三张5,(d)没有5.又如果其他人的牌有没有5未知时,这个概率是多少?作出解释.

1.100　如果游戏仅准许投掷三次,解习题1.40.

1.101　求桥牌游戏中的下列概率:(a)有2个人各有一套同花色牌,(b)有3个人各有一套同花色牌,(c)4个人均各有一套同花色牌.

补充习题答案

1.47　(a)5/26,(b)5/36,(c)0.98,(d)2/9,(e)7/8

1.48　(a)第一次抽中K第二次未取到K的概率.

(b)第一次、第二次均取中 K 的概率.

(c)第一次未取中 K,或第二次未取中 K,或两次均未取到 K 的概率.

(d)第一、第二和第三次均不是 K.

(e)第一、第二次均抽中 K 或者第二次未抽中 K 而第三次抽中 K 和事件的概率.

1.49 (a)1/3,(b)3/5,(c)11/15,(d)2/5,(e)4/5

1.50 (a)4/25, (b)4/75, (c)16/25, (d)64/225, (e)11/15, (f)1/5, (g)104/225, (h)221/225, (i)6/25, (j)52/225

1.51 (a)29/185, (b)2/37, (c)118/185, (d)52/185, (e)11/15, (f)1/5, (g)86/185, (h)182/185, (i)9/37, (j)26/111

1.52 (a)3/10, (b)1/10, (c)3/5

1.53 (a)1/2197, (b)1/17 576

1.54 1/3

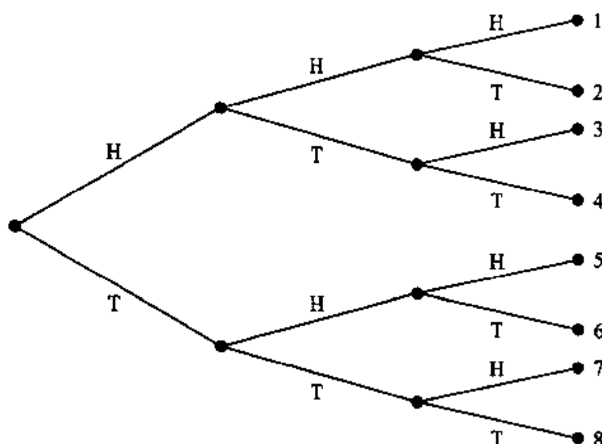
1.55 21/56

1.56 21/31

1.57 1/3

1.58 14/57

1.59 见右图.



1.60 (a)$13\times13\times13$, (b)$13\times12\times26$

1.61 8

1.62 (a)12, (b)2 520, (c)720

1.63 $n=5$

1.64 60

1.65 (a)5 040, (b)720, (c)240

1.66 (a)8 400, (b)2 520

1.67 (a)32 805, (b)11 664

1.68 26

1.69 (a)120, (b)72, (c)12

1.70 (a)10, (b)70, (c)45

1.71 $n=6$

1.72 210

1.73 840

1.74 (a)42 000, (b)7 000

1.75 (a)120, (b)2 520

1.76 (a)150, (b)45, (c)100

1.77 (a)17, (b)163

1.78 (a)20, (b)330, (c)14/99

1.79 (a)$x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^3+6xy^5+y^6$

(b)$x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4$

(c)$x^5-5x^3+10x-10x^{-1}+5x^{-3}-x^{-5}$

(d)$x^8+8x^6+24x^4+32x^2+16$

1.80 2 016

1.81 (a)5/18, (b)11/36, (c)1/36

1.82 (a)47/52, (b)16/221, (c)15/34, (d)13/17, (e)210/221, (f)10/13, (g)40/51, (h)77/442

1.83 5/18

1.84 (a)81:44, (b)21:4

1.85 (a)$({}_{13}C_7)({}_{13}C_2)({}_{13}C_3)({}_{13}C_1)/{}_{52}C_{13}$, (b)$4/{}_{52}C_{13}$

1.86 $({}_6C_3)({}_8C_2)/{}_{14}C_5$

1.87 (a)91/216, (b)至少 17

1.88 (a)$4\cdot{}_{13}C_3/{}_{52}C_3$, (b)$({}_4C_2\cdot{}_{48}C_1+{}_4C_3)/{}_{52}C_3$

1.89 $4({}_{13}C_9)({}_{39}C_4)/{}_{52}C_{13}$

1.90 $\sqrt{11}-3$

1.91 (a)120, (b)60, (c)72

1.92 (a)63/125, (b)963/1 000

1.93 1 419 857/34 012 224

1.94 (a)13, (b)53

1.95 (a)$4/{}_{52}C_5$, (b)$(13)(2)(4)(6)/{}_{52}C_5$, (c)$4^5({}_{13}C_5)/{}_{52}C_5$, (d)(5)(4)(3)(2)/(52)(51)(50)(49)

1.96 2/243

1.97 (a)126, (b)${}_{n+r-1}C_{n-1}$

1.98 (a)462, (b)${}_{r-1}C_{n-1}$

1.99 (a)3/32, (b)1/16, (c)1/32, (d)1/8

1.100 A 胜的概率 = 61/216, B 胜的概率 = 5/36, 和局的概率 = 125/216

1.101 (a)$12/({}_{52}C_{13})({}_{39}C_{13})$, (b)$24/({}_{52}C_{13})({}_{39}C_{13})({}_{26}C_{13})$, (c)同(b)

第二章　随机变量与概率分布

随机变量

假设对一个样本空间的每个点,我们指定一个数.于是就在该样本空间上定义了一个函数,称这个函数为随机变量或更确切地称之为随机函数,通常用大写字母 X 或 Y 表示.一般说来,随机变量都有某种特定的物理意义、几何意义或其他意义.

例 2.1　假设两次抛掷一枚硬币,因此样本空间是 $S=\{HH,HT,TH,TT\}$.令 X 代表可能发生的正面个数.每个样本点可以连带一个数,正如表 2-1 中的 X 所示.例如,对情形 HH(即两个正面),$X=2$.而对 TH(1 个正面),则 $X=1$.这表明 X 是随机变量.

表 2-1

样本点	HH	HT	TH	TT
X	2	1	1	0

应该注意,在这个样本空间上也可以定义许多其他的随机变量,例如,正面个数的平方或正面个数减反面个数.

具有有限多个值或无限多个可数值(见第一章)的随机变量称之为离散随机变量,而具有无限多个不可数值者则称之为非离散随机变量.

离散概率分布

令 X 是离散随机变量,假设其值可由序列 $x_1,x_2,x_3,\cdots$ 给出.并假设这些值具有下列概率

$$P(X=x_k)=f(x_k),\qquad k=1,2,\cdots \tag{1}$$

按下面公式(2)引入概率函数是很方便的,也称它为概率分布

$$P(X=x)=f(x) \tag{2}$$

对于 $x=x_k$,(2)化为(1),对于其他的 x,$f(x)=0$.

通常,概率函数满足

1. $f(x)\geqslant 0$
2. $\sum_x f(x)=1$

上式 2 中的和取遍 x 的所有可能值.

例 2.2　求例 2.1 中的对应于随机变量 X 的概率函数.假设硬币是匀称的,我们有

$$P(HH)=\frac{1}{4},\quad P(HT)=\frac{1}{4},\quad P(TH)=\frac{1}{4},\quad P(TT)=\frac{1}{4}$$

于是

$$P(X=0)=P(TT)=\frac{1}{4}$$

$$P(X=1)=P(HT\cup TH)=P(HT)+P(TH)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=2)=P(HH)=\frac{1}{4}$$

因而,概率函数由表 2-2 给出.

表 2-2

x	0	1	2
$f(x)$	1/4	1/2	1/4

随机变量的分布函数

对于随机变量 X,累积分布函数,或简言之,分布函数是由下式(3)定义的

$$F(x) = P(X \leqslant x) \tag{3}$$

这里 x 是任意实数,即 $-\infty < x < +\infty$.

分布函数 $F(x)$ 有下列性质:

1. $F(x)$ 是非减的(即,$F(x) \leqslant F(y)$,当 $x \leqslant y$),
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$,　$\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$.
3. $F(x)$ 是右连续的(即,$\lim\limits_{h\to0^+} F(x+h)=F(x)$,对所有的 x).

离散随机变量的分布函数

注意到式(4),对所有属于 $(-\infty,\infty)$ 的 x,离散随机变量 X 的分布函数可由它的概率函数得到

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{u\leqslant x} f(u) \tag{4}$$

这里的和取遍满足 $u \leqslant x$ 被 X 取到的所有 u 值.

若 X 仅取有限个值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,则分布函数由下式给出

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1), & x_1 \leqslant x < x_2 \\ f(x_1)+f(x_2), & x_2 \leqslant x < x_3 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f(x_1)+\cdots+f(x_n), & x_n \leqslant x < \infty \end{cases} \tag{5}$$

例 2.3　(a)求例 2.2 中的随机变量 X 的分布函数,(b)做它的图形.

解答　(a)分布函数是

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \leqslant x < 2 \\ 1, & 2 \leqslant x < \infty \end{cases}$$

(b) $F(x)$ 的图形在图 2-1 里显示.

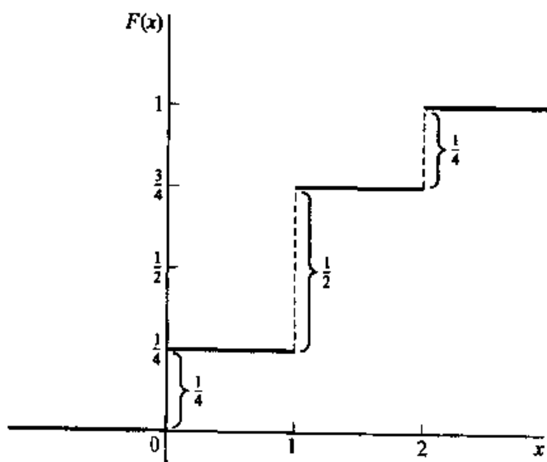


图 2-1

应该注意,一般来说下面几点对以上分布函数是正确的:

1. 在 0,1,2 跳跃的量值是 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$,它们是表 2-2 中的精确概率值.这个事实可以使人们从分布函数求得概率函数.

2. 由于图 2-1 里的图形的样子,常常称它为阶梯函数.在整数处的函数值是从较高阶梯取得的;从而在 1 处的函数值是 $\frac{3}{4}$ 而不是 $\frac{1}{4}$.在数学上表述为,该分布函数在 0,1,2 是右连续的.

3. 当我们从左到右(即上台阶)时,该分布函数取值从 0 到 1,且具有的值不是保持不变的就是递增的.因此,它是单调递增函数.

显然,从以上的评论和分布函数的性质,可以从下式由分布函数得到离散的随机变量的概率函数

$$f(x)=F(x)-\lim_{u\to x}F(u) \tag{6}$$

连续的随机变量

非离散的随机变量 X 被称之为绝对连续的,或简称连续的,如果其分布函数能表示成

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du \quad (-\infty<x<\infty) \tag{7}$$

这里函数 $f(x)$ 具有性质:

1. $f(x)\geqslant 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$

若 X 是连续的随机变量,根据上述则对于 X 的任一个特殊值的概率是零,而属于两个不同值 a 与 b 之间的 X 的概率为区间概率,由下式给出

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx \tag{8}$$

例 2.4 例如若从一大组男性成年人中随机地选取一个,他的精确高度 X 是 68.000 英寸的概率为零.可是,X 在 67.000 与 68.500 之间的概率大于零.

满足以上条件的函数 $f(x)$ 称之为连续的随机变量的概率函数或概率分布,但是通常称它为概率密度函数或简称密度函数.任何一个满足以上性质 1 和 2 的函数 $f(x)$ 就称为密度函数,并且能够根据(8)式求得概率.

例 2.5 (a)设密度函数

$$f(x)=\begin{cases}cx^2, & 0<x<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求常数 c,(b)计算 $P(1<x<2)$.

解 ☞ (a)由于 $f(x)$ 是密度函数,所以它必满足性质 1 和 2,从而 $c\geqslant 0$,且

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_0^3 cx^2dx=\frac{c}{3}x^3\Big|_0^3=9c$$

于是得到 $c=\frac{1}{9}$.

(b)
$$P(1<X<2)=\int_1^2\frac{1}{9}x^2dx=\frac{x^3}{27}\Big|_1^2=\frac{8}{27}-\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$$

在 $f(x)$ 是连续的情形中,除非另说明,我们将假定 X 等于任何特殊值的概率为 0.在这样的情形中,我们可以用 $\leqslant$ 代替(8)中的 1 个或两个符号 $<$.于是,在例 2.5 中,

$$P(1\leqslant X\leqslant 2)=P(1\leqslant X<2)=P(1<X\leqslant 2)=P(1<X<2)=\frac{7}{27}$$

例 2.6 (a)求例 2.5 中随机变量的分布函数.(b)利用(a)的结果求 $P(1<x\leqslant 2)$.

解 ☞ (a)我们有

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du$$

若 $x<0$,则 $F(x)=0$.若 $0\leqslant x<3$,则

$$F(x)=\int_0^x f(u)du=\int_0^x\frac{1}{9}u^2du=\frac{x^3}{27}$$

若 $x\geqslant 3$,则

$$F(x)=\int_0^3 f(u)du+\int_3^x f(u)du=\int_0^3\frac{1}{9}u^2du+\int_3^x 0du=1$$

于是所要求的分布函数是

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^3/27, & 0\leqslant x<3\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}$$

注意，$F(x)$从 0 单调递增到 1.且 $F(x)$是连续的.

(b)我们有

$$P(1<X\leqslant 2)=P(X\leqslant 2)-P(X\leqslant 1)=F(2)-F(1)$$
$$=\frac{2^3}{27}-\frac{1^3}{27}=\frac{7}{27}$$

X 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间的概率由下式给出

$$P(x\leqslant X\leqslant x+\Delta x)=\int_x^{x+\Delta x}f(u)du \tag{9}$$

因此，若 Δx 很小时，我们近似地得到

$$P(x\leqslant X\leqslant x+\Delta x)=f(x)\Delta x \tag{10}$$

对(7)式两边求导，我们得到

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x) \tag{11}$$

这里对所有的 $f(x)$的连续点，即分布函数的导数是密度函数.

应该指出，存在着既不是离散的也不是连续的随机变量.以下表示出的随机变量与其分布函数就是一例.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \dfrac{x}{2}, & 1\leqslant x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$$

为了得到(11)式，我们利用基本性质

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du=f(x) \tag{12}$$

它是微积分基本定理的一种描述.

图形解释

若 $f(x)$是随机变量 X 的密度函数，则可用图 2-2 中的一条曲线来对 $y=f(x)$作图形上的描述.由于 $f(x)\geqslant 0$，所以该曲线不可能落到 x 轴的下面.由(7)式之后的性质 2，故以该曲线与 x 轴为界的整个面积必是 1.从几何上看，在 a 与 b 之间的 X 的概率，即 $P(a<X<b)$，则是用图 2-2 中阴影部分的面积来描述.

分布函数 $F(x)=P(X\leqslant x)$是单调递增函数，它从 0 递增到 1，用图 2-3 中的曲线来描述.

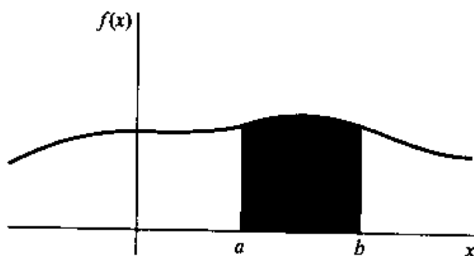


图 2-2

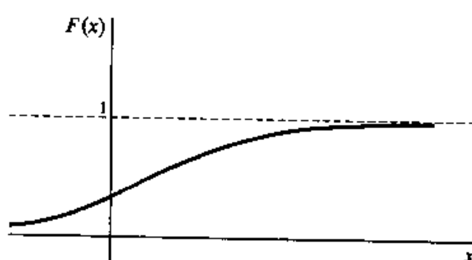


图 2-3

联合分布

以上概念容易被推广为两个或更多个随机变量的情形.我们考虑两个随机变量的典型情形，它们或者两个都是离散的或者两个都是连续的.至于一个变量是离散的而另一个是连续的情形，则只要适当修改就容易解决，推广为两个以上变量的情形，也能解决.

1. 离散情形. 若 X 和 Y 是两个离散的随机变量, 我们用下式来定义 X 和 Y 的联合概率函数

$$P(X = x, Y = y) = f(x, y) \tag{13}$$

这里,

(1) $f(x, y) \geqslant 0$;

(2) $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$.

即取遍 x 与 y 的所有值的总和等于 1.

假定 X 可取 m 个值 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 中的任一个, Y 可取 n 个值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 中的任一个. 则事件 $X = x_j$ 和 $Y = y_k$ 的概率由下式给出

$$P(X = x_j, Y = y_k) = f(x_j, y_k) \tag{14}$$

X 和 Y 的联合概率函数可以用表 2-3 中的联合概率来描述. $X = x_j$ 的概率可对所有在对应于 x_j 的行上各项相加, 用下式得到

$$P(X = x_j) = f_1(x_j) = \sum_{k=1}^{n} f(x_j, y_k) \tag{15}$$

表 2-3

X \ Y	y_1	y_2	…	y_n	总数 ↓
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	…	$f(x_1, y_n)$	$f_1(x_1)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	…	$f(x_2, y_n)$	$f_1(x_2)$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
x_m	$f(x_m, y_1)$	$f(x_m, y_2)$	…	$f(x_m, y_n)$	$f_1(x_m)$
总数→	$f_2(y_1)$	$f_2(y_2)$	…	$f_2(y_n)$	1 ←总计数

对 $j = 1, 2, \cdots, m$, 在表 2-3 的最右边的列或边缘用单元小格总数来表明. 类似地, $Y = y_k$ 的概率可对所有在对应于 y_k 的列上各项相加, 用下式得到

$$P(Y = y_k) = f_2(y_k) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j, y_k) \tag{16}$$

对 $k = 1, 2, \cdots, n$, 在表 2-3 的最下边的行或边缘用单元小格总数来表明.

由于概率(15)和(16)是从表的边缘得到的, 我们常常把 $f_1(x_j)$ 和 $f_2(y_k)$ (或简记为 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$) 分别称为 X 和 Y 的边缘概率函数. 也应该注意到

$$\sum_{j=1}^{m} f_1(x_j) = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} f_2(y_k) = 1 \tag{17}$$

它可以写成

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_j, y_k) = 1 \tag{18}$$

X 和 Y 的联合分布函数由下式定义

$$F(x, y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y) = \sum_{u \leqslant x} \sum_{v \leqslant y} f(u, v) \tag{19}$$

在表 2-3 中, $F(x, y)$ 是所有满足 $x_j \leqslant x$ 和 $y_k \leqslant y$ 的单元小格的和的总数.

2. 连续情形. 两个变量都是连续的情形, 只要在离散的情形中, 用积分代替和就可类似地得到. 因此, 随机变量 X 和 Y 的联合概率函数(或通常称之为 X 和 Y 的联合密度函数)被定义为

(1) $f(x, y) \geqslant 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

$z = f(x, y)$ 的图形描绘出一块曲面, 称为概率曲面, 像图2-4所显示的那样. 按上述性质2, 界

于该曲面与 xy 平面之间的总体积等于 1. X 属于 a 与 b 之间而 Y 属于 c 与 d 之间的概率，在几何上，由图 2-4 中阴影部分的体积给出，在数学上由下式给出：

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dx\,dy \tag{20}$$

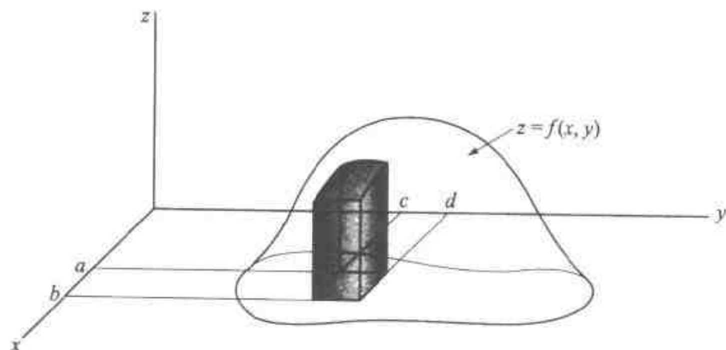


图 2-4

更一般地，若 A 代表任一个事件，对应于它的是 xy 平面上的一个区域 $\mathscr{R}_A$. 在此情形中，我们可用 $\mathscr{R}_A$ 上的积分来求 A 的概率，即

$$P(A) = \iint_{\mathscr{R}_A} f(x,y)\,dx\,dy \tag{21}$$

在该情形中，X 和 Y 的联合分布函数被下式定义

$$F(x,y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y) = \int_{u=-\infty}^{x}\int_{v=-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv \tag{22}$$

下列式子与(11)式类似

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y) \tag{23}$$

即密度函数由对分布函数关于 x 与 y 求导而得到.

从(22)式得到

$$P(X \leqslant x) = F_1(x) = \int_{u=-\infty}^{x}\int_{v=-\infty}^{\infty} f(u,v)\,du\,dv \tag{24}$$

$$P(Y \leqslant y) = F_2(y) = \int_{u=-\infty}^{\infty}\int_{v=-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv \tag{25}$$

我们分别称(24)和(25)式为 X 和 Y 的边缘分布函数或简称分布函数. 则(24)和(25)式关于 x 和 y 的导数就称为 X 和 Y 的边缘密度函数，或简称密度函数，并用下式给出：

$$f_1(x) = \int_{v=-\infty}^{\infty} f(x,v)\,dv, \quad f_2(y) = \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u,y)\,du \tag{26}$$

独立随机变量

假设 X 和 Y 是离散的随机变量. 若事件 $X = x$ 和 $Y = y$ 对所有的 x 和 y 都是独立事件，则称 X 和 Y 是独立随机变量，在该情形，

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \tag{27}$$

或等价于

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y) \tag{28}$$

相反地，若对所有的 x 和 y，联合概率函数 $f(x,y)$ 能够表成一个变量 x 的函数与一个变量 y 的函数的乘积(则它们是 X 和 Y 的边缘概率函数)，则 X 和 Y 是独立的. 若 $f(x,y)$ 不能这样表示，则 X 和 Y 是不独立的.

若 X 和 Y 是连续的随机变量,对所有的 x 和 y 事件 $X \leqslant x$ 和 $Y \leqslant y$ 都是独立事件,则我们称它们是独立随机变量.在此情形中可写成

$$P(X \leqslant x, Y \leqslant y) = P(X \leqslant x)P(Y \leqslant y) \tag{29}$$

或等价于

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y) \tag{30}$$

这里 $F_1(x)$和 $F_2(y)$分别是 X 和 Y 的边缘分布函数.相反地,若对所有的 x 和 y,联合分布函数 $F(x, y)$可表成 x 的函数和 y 的函数的乘积(它们分别是 X 和 Y 的边缘分布),则称 X 和 Y 是独立随机变量.若 $F(x, y)$不能这样表示,则 X 和 Y 是不独立的.

对于连续的独立随机变量,下面关于密度函数的叙述也是正确的,即联合密度函数是一元 x 的函数 $f_1(x)$与一元 y 的函数 $f_2(y)$的乘积,且它们分别是 X 和 Y 的边缘密度函数.

变量替换

给定 1 个或多个随机变量的概率分布,我们常常对找另外的随机变量的分布有兴趣,这些随机变量按某些指定的方式,依赖那些给定的变量.在下列关于离散的和连续的变量的定理中,将陈述得到这些分布的过程.

1. 离散的变量

定理 2-1 令 X 是一个离散的随机变量,它的概率函数是 $f(x)$.假设离散的随机变量 U 在 X 的各值上被 $U = \phi(X)$ 确定;相反地,若 X 的每一个值都对应惟一的一个值,则 $X = \psi(U)$.于是 U 的概率函数由下式给出:

$$g(u) = f[\psi(u)] \tag{31}$$

定理 2-2 令 X 和 Y 是联合概率函数 $f(x, y)$的离散的随机变量.假设两个离散的随机变量 U 和 V 在 X 和 Y 的各值上被 $U = \phi_1(X, Y)$, $V = \phi_2(X, Y)$确定;相反地,这里 X 和 Y 的每一对值仅对应惟一的 U 和 V 的一对值,因此 $X = \psi_1(U, V)$, $Y = \psi_2(U, V)$.于是 U 和 V 的联合概率函数由下式给出:

$$g(u, v) = f[\psi_1(u, v), \psi_2(u, v)] \tag{32}$$

2. 连续的变量

定理 2-3 令 X 是有概率密度函数的一个连续的随机变量.让我们定义 $U = \phi(X)$,这里,$X = \psi(U)$,则 U 的概率密度由 $g(u)$给出:

$$g(u) \mid du \mid = f(x) \mid dx \mid \tag{33}$$

或

$$g(u) = f(x)\left|\frac{dx}{du}\right| = f[\psi(u)] \mid \psi'(u) \mid \tag{34}$$

定理 2-4 令 X 和 Y 是联合密度函数 $f(x, y)$的连续的随机变量.让我们定义 $U = \phi_1(X, Y)$, $V = \phi_2(X, Y)$,这里,$X = \psi_1(U, V)$, $Y = \psi_2(U, V)$.则 U 和 V 的联合密度函数由 $g(u, v)$给出:

$$g(u, v) \mid dudv \mid = f(x, y) \mid dxdy \mid \tag{35}$$

或

$$g(u, v) = f(x, y)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = f[\psi_1(u, v), \psi_2(u, v)] \mid J \mid \tag{36}$$

在(36)式中的雅可比行列式是

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{37}$$

随机变量函数的概率分布

在定理2-2和2-4中,指定了包含两个随机变量的联合概率函数.在实践中,人们常常需

要去找含若干个随机变量的某些指定函数的概率分布.为此目的,下列定理的任何一个常常有用.

定理 2-5 令 X 和 Y 是连续的随机变量且令 $U=\phi_1(X,Y)$, $V=X$(第二个选择是任意的).则 U 的密度函数是边缘密度,它从定理 2-4 中所求得的 U 和 V 的联合密度得到.类似的结果对离散的概率函数也成立.

定理 2-6 令 $f(x,y)$是 X 和 Y 的联合密度函数.则随机变量 $U=\phi_1(X,Y)$的密度函数 $g(u)$,是通过由下式给出的分布函数对 u 求导而得到

$$G(u)=P[\phi_1(X,Y)\leqslant u]=\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)dxdy \tag{38}$$

这里 $\mathscr{R}$ 是满足 $\phi_1(x,y)\leqslant u$ 的区域.

卷积

作为以上定理的一个特殊推论,我们可描述(见习题 2.23)两个连续的随机变量 X 和 Y 之和的密度函数,即 $U=X+Y$ 具有由下式给出的密度函数,$f(x,y)$为 X 和 Y 的联合密度函数:

$$g(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,u-x)dx \tag{39}$$

在 X 和 Y 是独立的特殊情形,$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$,且(36)式可简化成

$$g(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(u-x)dx \tag{40}$$

称它为 f_1 和 f_2 的卷积,缩写成 f_1*f_2.

下面是卷积的重要性质:

1. $f_1*f_2=f_2*f_1$;
2. $f_1*(f_2*f_3)=(f_1*f_2)*f_3$;
3. $f_1*(f_2+f_3)=f_1*f_2+f_1*f_3$.

这些结果表明,f_1,f_2,f_3 服从交换律,结合律,以及关于卷积的运算的代数分配律.

条件分布

我们已经知道,若 $P(A)>0$,

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \tag{41}$$

若 X 和 Y 是离散的随机变量且有事件$(A:X=x)$,$(B:Y=y)$,则(41)式变成

$$P(Y=y\mid X=x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)} \tag{42}$$

这里 $f(x,y)=P(X=x,Y=y)$是联合概率函数且 $f_1(x)$是 X 的边缘概率函数.我们定义

$$f(y\mid x)\equiv\frac{f(x,y)}{f_1(x)} \tag{43}$$

并称它是给定 X 时 Y 的条件概率函数.类似地,给定 Y 时 X 的条件概率函数是

$$f(x\mid y)\equiv\frac{f(x,y)}{f_2(y)} \tag{44}$$

我们有时分别用 $f_1(x\mid y)$和 $f_2(y\mid x)$来表示 $f(x\mid y)$和 $f(y\mid x)$.

这些概念容易推广到 X, Y 是连续的随机变量的情形.作为例子,给定 X 时 Y 的条件密度函数是

$$f(y\mid x)\equiv\frac{f(x,y)}{f_1(x)} \tag{45}$$

这里 $f(x,y)$是 X 和 Y 的联合密度函数,且 $f_1(x)$是 X 的边缘密度函数.作为例子,利用(45)

式，$x < X < x + dx$ 给定时属于 c 与 d 之间的 Y 的概率是

$$P(c < Y < d \mid x < X < x + dx) = \int_c^d f(y \mid x)dy \tag{46}$$

这些结果的一般情形也是有效的.

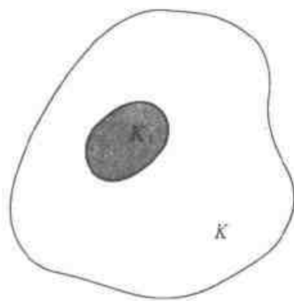


图 2-5

几何概率的应用

从几何上的思考或作几何解释可引出各种概率问题.例如,假设有一个靶呈面积为 K 的平面区域的形式,它的一部分具有面积 K_1,如图 2-5 所示.则假设击中面积 K_1 的区域的概率与 K_1 成比例是有道理的.因此我们定义

$$P(\text{击中面积 } K_1 \text{ 的区域}) = \frac{K_1}{K} \tag{47}$$

这里,假设击中靶的概率是 1.当然可以作其他的假设.例如、击中外部的面积可以有一个很小的概率.所用假设的类型定义了概率分布函数.

习题解答

离散的随机变量和概率分布

2.1　假设抛掷一对匀称的骰子,令随机变量 X 表示点数的和,就可得到 X 的概率分布.

解　☞ 抛掷一对骰子的样本点数在图 1-9 中给出.随机变量 X 是每个点的坐标的和.于是对于(3,2),$X=5$.根据这个事实,所有的 36 个样本点是等概的,从而每个样本点有概率 1/36,我们就得到表 2-4.例如,对应于 $X=5$,我们有样本点(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),因此连带概率是 4/36.

表 2-4

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

2.2　求有 3 个小孩的家庭中的男孩和女孩的概率分布,假设对男孩和女孩是等概的.

解　☞ 习题 1.37 解决了 n 个相互独立的试验的情形,这里每个试验恰好有两个可能的结果 A 和 A',它们各自的概率是 p 和 $q=1-p$.在这 n 个试验中,A 恰好出现 x 次的概率是 ${}_nC_x p^x q^{n-x}$.在逐次分娩(试验)中有关小孩的性别是独立的假设下,这个结果可应用到本问题.于是,事件 A 表示"一个男孩",$n=3$,且 $p=q=\frac{1}{2}$,我们有

$$P(\text{确有 } x \text{ 个男孩}) = P(X=x) = {}_3C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} = {}_3C_x\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

这里,随机变量 X 表示该家庭中的男孩数(注意,X 是定义在 3 次试验的样本空间上的).X 的概率函数

$$f(x) = {}_3C_x\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

被显示在表 2-5 里.

表 2-5

x	0	1	2	3
$f(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

离散的分布函数

2.3　(a)求习题 2.1 中的随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 和(b)求这个分布函数的图形.

解　(a)我们有 $F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{u\leqslant x}f(u)$. 则由习题 2.1 的结果,我们得到

$$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<2\\ 1/36, & 2\leqslant x<3\\ 3/36, & 3\leqslant x<4\\ 6/36, & 4\leqslant x<5\\ \vdots & \vdots\\ 35/36, & 11\leqslant x<12\\ 1, & 12\leqslant x<\infty\end{cases}$$

(b)见图 2-6.

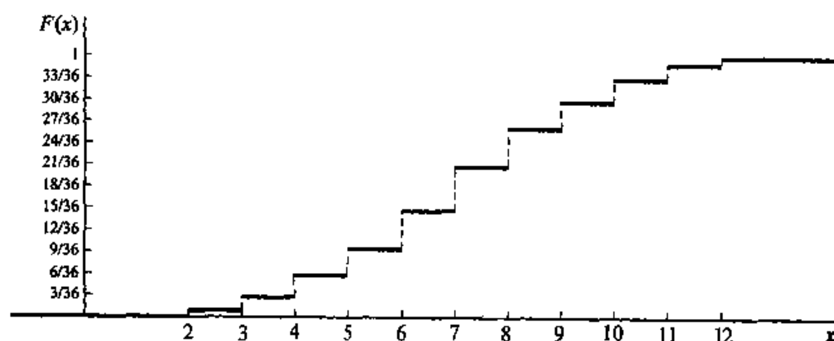


图 2-6

2.4　(a) 求习题 2.2 中的随机变量 X 的分布函数 $F(x)$;
(b) 这个分布函数的图形.

解　(a)利用习题 2.2 的表 2-5,我们得到

$$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0\\ 1/8, & 0\leqslant x<1\\ 1/2, & 1\leqslant x<2\\ 7/8, & 2\leqslant x<3\\ 1, & 3\leqslant x<\infty\end{cases}$$

(b)　(a)的分布函数的图形被描绘在图 2-7 里.

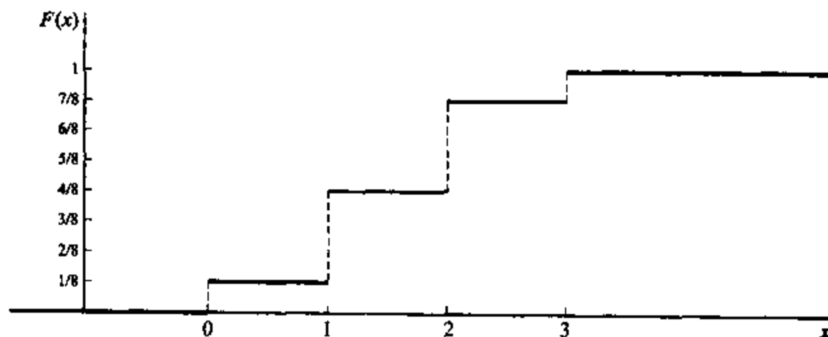


图 2-7

连续的随机变量和概率分布

2.5　随机变量 X 具有密度函数 $f(x)=c/(x^2+1)$，这里 $-\infty<x<\infty$.（a）求常数 c 的值.（b）求 X^2 属于 1/3 与 1 之间的概率.

解　☞（a）我们必有 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cdx}{x^2+1}=c\arctan x\Big|_{-\infty}^{\infty}=c\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=1$$

因此，$c=1/\pi$.

（b）若 $\frac{1}{3}\leqslant X^2\leqslant 1$，则 $\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant X\leqslant 1$ 或 $-1\leqslant X\leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$. 因此，所求的概率是

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-\sqrt{3}/3}\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{\pi}\int_{\sqrt{3}/3}^{1}\frac{dx}{x^2+1}=\frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{3}/3}^{1}\frac{dx}{x^2+1}$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[\arctan(1)-\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{6}$$

2.6　求习题 2.5 中，对应于密度函数的分布函数.

解　☞

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{du}{u^2+1}=\frac{1}{\pi}\left[\arctan u\Big|_{-\infty}^{x}\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}[\arctan x-\arctan(-\infty)]=\frac{1}{\pi}\left[\arctan x+\frac{\pi}{2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x$$

2.7　随机变量 X 的分布函数是

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

求（a）密度函数，（b）$X>2$ 的概率，（c）$-3<X\leqslant 4$ 的概率.

解　☞（a）

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

（b）

$$P(X>2)=\int_{2}^{\infty}2e^{-2u}du=-e^{-2u}\Big|_{2}^{\infty}=e^{-4}$$

另解　根据定义，$P(X\leqslant 2)=F(2)=1-e^{-4}$. 因此，

$$P(X>2)=1-(1-e^{-4})=e^{-4}$$

（c）

$$P(-3<X\leqslant 4)=\int_{-3}^{4}f(u)du=\int_{-3}^{0}0du+\int_{0}^{4}2e^{-2u}du$$
$$=-e^{-2u}\Big|_{0}^{4}=1-e^{-8}$$

另解

$$P(-3<X\leqslant 4)=P(X\leqslant 4)-P(X\leqslant -3)$$
$$=F(4)-F(-3)$$
$$=(1-e^{-8})-(0)=1-e^{-8}$$

联合分布和独立变量

2.8　两个离散的随机变量 X 和 Y 的联合分布函数为 $f(x,y)=c(2x+y)$，这里，假设 x 沿 $0\leqslant x\leqslant 2$ 积分，y 沿 $0\leqslant y\leqslant 3$ 积分，否则 $f(x,y)=0$.
（a）求常数 c 的值，（b）求 $P(X=2,Y=1)$，（c）求 $P(X\geqslant 1,Y\leqslant 2)$.

解　☞（a）对应于概率非零的样本点 (x,y)，在图 2-8 里显示出来. 这些点的概率由 $c(2x+y)$ 给出，它们被表 2-6 表出，由于总计数 $42c$ 必等于 1，我们得到 $c=1/42$.

表 2-6

Y \ X	0	1	2	3	总计数 ↓
0	0	c	$2c$	$3c$	$6c$
1	$2c$	$3c$	$4c$	$5c$	$14c$
2	$4c$	$5c$	$6c$	$7c$	$22c$
总计数→	$6c$	$9c$	$12c$	$15c$	$42c$

(b)从表 2-6，我们知道

$$P(X=2, Y=1)=5c=\frac{5}{42}$$

(c)从表 2-6，我们知道

$$P(X\geqslant 1, Y\leqslant 2)=\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\leqslant 2}f(x,y)$$
$$=(2c+3c+4c)(4c+5c+6c)$$
$$=24c=\frac{24}{42}=\frac{4}{7}$$

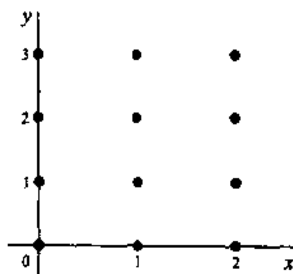


图 2-8

2.9 求习题 2.8 中，(a)随机变量 X 的边缘概率函数和(b)随机变量 Y 的边缘概率函数.

解 (a) X 的边缘概率函数由 $P(X=x)=f_1(x)$ 给出，它可从表 2-6 的最右边列内的边缘总计数得到.根据这些，我们知道

$$P(X=x)=f_1(x)=\begin{cases}6c=1/7, & x=0\\ 14c=1/3, & x=1\\ 22c=11/21, & x=2\end{cases}$$

检验：$\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{11}{21}=1$.

(b) Y 的边缘概率函数由 $P(Y=y)=f_2(y)$ 给出，它可从表 2-6 的最后一行内的边缘总计数得到.根据这些，我们知道

$$P(Y=y)=f_2(y)=\begin{cases}6c=1/7, & y=0\\ 9c=3/14, & y=1\\ 12c=2/7, & y=2\\ 15c=5/14, & y=3\end{cases}$$

检验：$\frac{1}{7}+\frac{3}{14}-\frac{2}{7}+\frac{5}{14}=1$.

2.10 指出习题 2.8 中的随机变量是不独立的.

解 若随机变量 X 和 Y 是独立的，则对所有的 x 和 y 必有

$$P(X=x, Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$$

但是，根据习题 2.8(b)和 2.9 得知，

$$P(X=2, Y=1)=\frac{5}{42},\quad P(X=2)=\frac{11}{21},\quad P(Y=1)=\frac{3}{14}$$

因此

$$P(X=2, Y=1)\neq P(X=2)P(Y=1)$$

这个结果表明，联合概率函数 $(2x+y)/42$ 不能表成一元 x 的函数和一元 y 的函数的乘积.

2.11 两个连续的随机变量 X 和 Y 的联合密度函数是

$$f(x,y)=\begin{cases}cxy, & 0<x<4,\ 1<y<5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(a)求常数 c 的值，(b)求 $P(1<X<2, 2<Y<3)$，(c)求 $P(X\leqslant 3, Y\leqslant 2)$.

解 ☞ (a)我们必有总概率等于1,即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

利用 $f(x,y)$的定义,积分得到

$$\int_{x=0}^{4}\int_{y=1}^{5} cxydxdy = c\int_{x=0}^{4}\left[\int_{y=1}^{5} xydy\right]dx$$

$$= c\int_{x=0}^{4} \left.\frac{xy^2}{2}\right|_{y=1}^{5} dx = c\int_{x=0}^{4}\left(\frac{25x}{2}-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= c\int_{x=0}^{4} 12xdx = c(6x^2)\Big|_{x=0}^{4} = 96c$$

则 $96c=1$, $c=1/96$.

(b)利用(a)中 c 的值,我们有

$$P(1<X<2,2<Y<3) = \int_{x=1}^{2}\int_{y=2}^{3}\frac{xy}{96}dxdy$$

$$= \frac{1}{96}\int_{x=1}^{2}\left[\int_{y=2}^{3} xydy\right]dx = \frac{1}{96}\int_{x=1}^{2}\left.\frac{xy^2}{2}\right|_{y=2}^{3}dx$$

$$= \frac{1}{96}\int_{x=1}^{2}\frac{5x}{2}dx = \frac{5}{192}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2} = \frac{5}{128}$$

(c)

$$P(X\geqslant 3, Y\leqslant 2) = \int_{x=3}^{4}\int_{y=1}^{2}\frac{xy}{96}dxdy$$

$$= \frac{1}{96}\int_{x=3}^{4}\left[\int_{y=1}^{2} xydy\right]dx = \frac{1}{96}\int_{x=3}^{4}\left.\frac{xy^2}{2}\right|_{y=1}^{2}dx$$

$$= \frac{1}{96}\int_{x=3}^{4}\frac{3x}{2}dx = \frac{7}{128}$$

2.12　求习题2.11中,(a) X 的边缘分布函数和(b) Y 的边缘分布函数.

解 ☞ (a) $0\leqslant x<4$ 时, X 的边缘分布函数是

$$F_1(x) = P(X\leqslant x) = \int_{u=-\infty}^{x}\int_{v=-\infty}^{\infty} f(u,v)dudv$$

$$= \int_{u=0}^{x}\int_{v=1}^{5}\frac{uv}{96}dudv$$

$$= \frac{1}{96}\int_{u=0}^{x}\left[\int_{v=1}^{5} uvdv\right]du = \frac{x^2}{16}$$

$x\geqslant 4$ 时, $F_1(x)=1$, $x<0$ 时, $F_1(x)=0$. 于是

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2/16, & 0\leqslant x<4 \\ 1, & x\geqslant 4 \end{cases}$$

由于 $F_1(x)$在 $x=0$ 和 $x=4$ 处是连续的,所以我们可以在以上表示式中用≤代替<.

(b)若 $1\leqslant y<5$, Y 的边缘分布函数是

$$F_2(y) = P(Y\leqslant y) = \int_{u=-\infty}^{\infty}\int_{v=1}^{y} f(u,v)dudv$$

$$= \int_{u=0}^{4}\int_{v=1}^{y}\frac{uv}{96}dudv = \frac{y^2-1}{24}$$

$y\geqslant 5$ 时, $F_2(y)=1$. $y<1$ 时, $F_2(y)=0$. 于是

$$F_2(y) = \begin{cases} 0, & y<1 \\ (y^2-1)/24, & 1\leqslant y<5 \\ 1, & y\geqslant 5 \end{cases}$$

由于 $F_2(y)$在 $y=1$ 和 $y=5$ 处连续,所以我们可以在以上表示式中用≤代替<.

2.13　求习题2.11中,随机变量 X, Y 的联合分布函数.

解 ☞ 从习题2.11看出,能将 X 和 Y 的联合密度函数写成一元 x 的函数与一元 y 的函数的乘积.事实上,$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$,这里

$$f_1(x)=\begin{cases}c_1x, & 0<x<4\\ c, & \text{其他}\end{cases}, \quad f_2(y)=\begin{cases}c_2y, & 1<y<5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

且 $c_1c_2=c=1/96$.从而 X 和 Y 是独立的,因此它们的联合分布函数由 $F(x,y)=F_1(x)F_2(y)$ 给出.在习题2.12中,边缘分布 $F_1(x)$ 和 $F_2(y)$ 已被确定,图2-9表明对 $F(x,y)$ 的分段定义的结果.

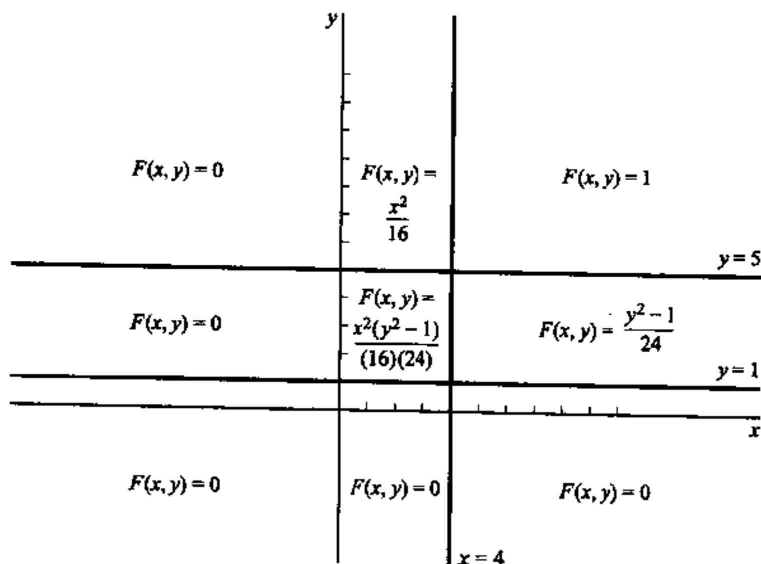


图2-9

2.14 求习题2.11中的 $P(X+Y<3)$.

解 ☞ 在图2-10中,我们已经指出,在正方形区域 $0<x<4, 1<y<5$ 内的 X 和 Y 的联合密度函数是不同于零的.所要求的概率由下式给出:

$$P(X+Y<3)=\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,dxdy$$

这里是正方形上 $x+y<3$ 的部分,在图2-10中,用阴影描绘.由于在 $\mathscr{R}$ 上 $f(x,y)=xy/96$,所以该概率由下式给出:

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=1}^{3-x}\frac{xy}{96}dxdy=\frac{1}{96}\int_{x=0}^{2}\left[\int_{y=1}^{3-x}xydy\right]dx$$

$$=\frac{1}{96}\int_{x=0}^{2}\frac{xy^2}{2}\bigg|_{y=1}^{3-x}dx$$

$$=\frac{1}{192}\int_{x=0}^{2}[x(3-x)^2-x]$$

$$=\frac{1}{48}$$

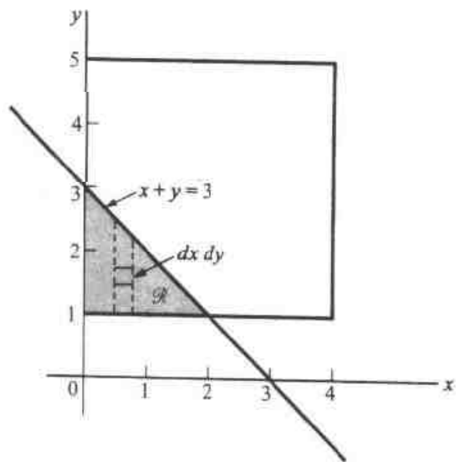


图2-10

变量替换

2.15 证明定理2-1.

证明 ☞ U 的概率函数由下式给出:

$$g(u)=P(U=u)=P[\phi(X)=u]=P[X=\psi(u)]=f[\psi(u)]$$

也可以类似地证明定理2-2.

2.16 证明定理2-3.

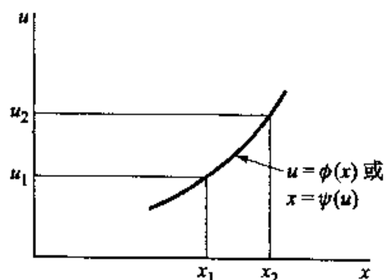


图 2-11

证明 ☞ 首先考虑 $u=\phi(x)$或 $x=\psi(u)$是递增函数的情形,即 u 随 x 增加而增加(图 2-11),从图形可看得很清楚,我们有

(1) $$P(u_1<U<u_2)=P(x_1<X<x_2)$$

或

(2) $$\int_{u_1}^{u_2}g(u)du=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$$

在右边的积分内,令 $x=\psi(u)$,(2)式可写成

$$\int_{u_1}^{u_2}g(u)du=\int_{u_1}^{u_2}f[\psi(u)]\psi'(u)du$$

上式当被积函数恒等,即

$$g(u)=f[\psi(u)]\psi'(u)$$

时,对全部 u_1 和 u_2 成立.这是(34)式的特殊情形,这里 $\psi'(u)>0$(即斜率是正的).对于 $\psi'(u)\leqslant 0$ 的情形,即 u 是 x 的递减函数,我们也能指出前面的(34)式成立(见习题 2.67).若 $\psi'(u)\geqslant 0$ 或 $\psi'(u)<0$,也能证明该定理.

2.17 证明定理 2-4.

解 ☞ 我们首先假设当 x 和 y 递增时,u 和 v 也递增,则我们能得到

$$P(u_1<U<u_2,v_1<V<v_2)=P(x_1<X<x_2,y_1<Y<y_2)$$

或

$$\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}g(u,v)dudv=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)dxdy$$

在右边的积分内,令 $x=\psi_1(u,v)$, $y=\psi_2(u,v)$,根据高等微积分的定理,我们有

$$\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}g(u,v)dudv=\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}f[\psi_1(u,v),\psi_2(u,v)]Jdudv$$

这里

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

是雅可比行列式,于是

$$g(u,v)=f[\psi_1(u,v),\psi_2(u,v)]J$$

它是前面的(36)式,这里 $J>0$.类似地,对 $J<0$,我们能证明(36)式.

2.18 随机变量 X 的概率函数是

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x=1,2,3,\cdots\\0, & 其他\end{cases}$$

求随机变量 $U=x^4+1$ 的概率函数.

解 ☞ 由于 $U=X^4+1$,随机变量 U 和 X 的值 u 与 x 之间关系由 $u=x^4+1$ 或 $x=\sqrt[4]{u-1}$给出,这里 $u=2,17,82,\cdots$且取实的正根.利用定理 2-1 或习题 2.15.则要求的 U 的概率函数由下式给出:

$$g(u)=\begin{cases}2^{-\sqrt[4]{u-1}}, & u=2,17,82,\cdots\\0, & 其他\end{cases}$$

2.19 随机变量 X 的概率函数由下式给出:

$$f(x)=\begin{cases}x^2/81, & -3<x<6\\0, & 其他\end{cases}$$

求随机变量 $U=\frac{1}{3}(12-X)$的概率密度.

解 ☞ 我们有 $u=\frac{1}{3}(12-x)$或 $x=12-3u$.于是对于 x 的每一个值都有惟一的 u 值与之对应且反之亦然.对于 $x=-3$ 和 $x=6$ 分别对应的 u 值是 $u=5$ 和 $u=2$.由于 $\psi'(u)=dx/du=-3$,从而根据定理 2-3 或习题 2.16, U 的密度函数是

$$g(u)=\begin{cases}(12-3u)^2/27, & 2<u<5\\ 0, & 其他\end{cases}$$

检验：
$$\int_2^5 \frac{(12-3u)^2}{27}du=-\frac{(12-3u)^3}{243}\Bigg|_2^5=1$$

2.20　求随机变量 $U=X^2$ 的概率密度，这里 X 是习题 2.19 中的随机变量.

解　我们有 $u=x^2$ 或 $x=\pm\sqrt{u}$. 于是对于 x 的每一个值都对应上 u 的惟一值，但是对于 $u\neq 0$ 的每一个值却有 x 的两个值与之对应. 对于 $-3<x<6$ 的 x 值对应于 $0\leqslant u<36$ 的 u 值，如图 2-12 中所示.

如该图所示，区间 $-3<x<3$ 对应于 $0\leqslant u<9$ 而 $3<x<6$ 对应于 $9<u<36$. 这时就不能利用定理 2-3，但是可以按以下的步骤进行计算. U 的分布函数是

$$G(u)=P(U\leqslant u)$$

若 $0\leqslant u\leqslant 9$，我们有

$$G(u)=P(U\leqslant u)=P(X^2\leqslant u)=P(-\sqrt{u}\leqslant X\leqslant\sqrt{u})=\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}f(x)dx$$

但是，若 $9<u<36$，我们有

$$G(u)=P(U\leqslant u)=P(-3<X<\sqrt{u})=\int_{-3}^{\sqrt{u}}f(x)dx$$

图 2-12

由于密度函数 $g(u)$ 是 $G(u)$ 的导数，利用(12)式我们有

$$g(u)=\begin{cases}\dfrac{f(\sqrt{u})+f(-\sqrt{u})}{2\sqrt{u}}, & 0\leqslant u\leqslant 9\\ \dfrac{f(\sqrt{u})}{2\sqrt{u}}, & 9<u<36\\ 0, & 其他\end{cases}$$

利用给定的 $f(x)$ 的定义，它变成

$$g(u)=\begin{cases}\sqrt{u}/81, & 0\leqslant u\leqslant 9\\ \sqrt{u}/162, & 9<u<36\\ 0, & 其他\end{cases}$$

检验：
$$\int_0^9\frac{\sqrt{u}}{81}du+\int_9^{36}\frac{\sqrt{u}}{162}du=\frac{2u^{3/2}}{243}\Bigg|_0^9+\frac{u^{3/2}}{243}\Bigg|_9^{36}=1$$

2.21　若随机变量 X 和 Y 有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}xy/96, & 0<x<4,\ 1<y<5\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(见习题 2.11)，求 $U=X+2Y$ 的密度函数.

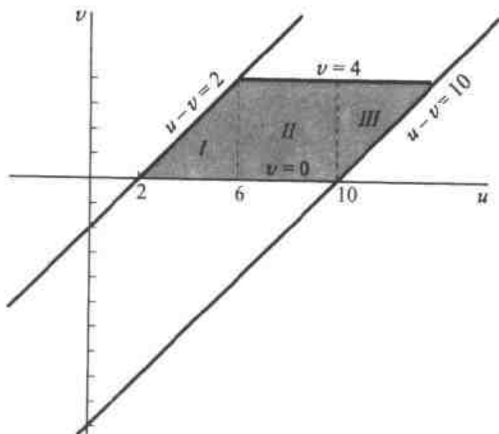


图 2-13

解　方法 1　令 $u=x+2y$，$v=x$，这第二个关系式是任选的，则 $x=v$，$y=\frac{1}{2}(u-v)$. 于是区域 $0<x<4$，$1<y<5$ 对应于区域 $0<v<4$，$2<u-v<10$，如图 2-13 中阴影部分所示.

该雅可比行列式由下式给出

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

则根据定理 2-4, U 和 V 的联合密度函数是

$$g(u,v)=\begin{cases}v(u-v)/384, & 2<u-v<10, 0<v<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

U 的边缘密度函数由下式给出：

$$g_1(u)=\begin{cases}\int_{v=0}^{u-2}\frac{v(u-v)}{384}dv, & 2<u<6\\ \int_{v=0}^{4}\frac{v(u-v)}{384}dv, & 6<u<10\\ \int_{v=u-10}^{4}\frac{v(u-v)}{384}dv, & 10<u<14\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

如图 2-13 中的阴影区域Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ所示,进行积分便有

$$g_1(u)=\begin{cases}(u-2)^2(u+4)/2304, & 2<u<6\\ (3u-8)/144, & 6<u<10\\ (348u-u^3-2128)/2304, & 10<u<14\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

方法 2 随机变量 $X+2Y$ 的分布函数由下式给出：

$$P(X+2Y\leqslant u)=\iint\limits_{x+2y\leqslant u} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\substack{x+2y\leqslant u\\ 0<x<4\\ 1<y<5}}\frac{xy}{96}dxdy$$

当 $2<u<6$ 时,我们看到图 2-14 所示,以上最后一个积分等于

$$\int_{x=0}^{u-2}\int_{y=1}^{(u-x)/2}\frac{xy}{96}dxdy=\int_{x=0}^{u-2}\left[\frac{x(u-x)^2}{768}-\frac{x}{192}\right]dx$$

求 u 的导数,得到 $(u-2)^2(u+4)/2304$. 类似地,我们可得到方法 1 中对 $6<u<10$ 等情形下的结果.

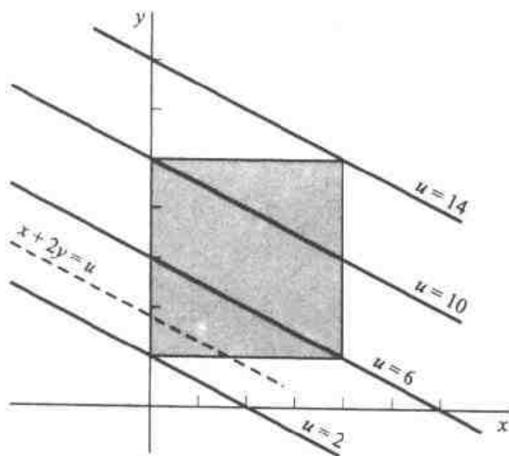


图 2-14

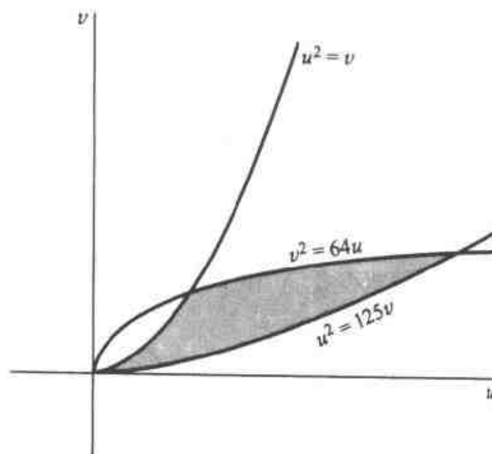


图 2-15

2.22 若随机变量 X 和 Y 有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}xy/96, & 0<x<4, 1<y<5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(见习题 2.11),求 $U=XY^2$, $V=X^2Y$ 的联合密度函数.

解 ☞ 考虑 $u=xy^2$, $v=x^2y$. 两个方程式相除,我们得到 $y/x=u/v$,因此, $y=ux/v$. 从而解得 $x=v^{2/3}u^{-1/3}$, $y=u^{2/3}v^{-1/3}$. 在 uv 平面里 $0<x<4$, $1<y<5$ 的像点由下式给出：

$$0 < u^{2/3}u^{-1/3} < 4, \quad 1 < u^{2/3}v^{-1/3} < 5$$

它们等价于

$$v^2 < 64u, \quad v < u^2 < 125v$$

该区域显示在图 2-15 里的阴影部分.

该雅可比行列式由下式给出:

$$J = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}v^{2/3}u^{-4/3} & \frac{2}{3}v^{-1/3}u^{-1/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{2/3}v^{-4/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}u^{-2/3}v^{-2/3}$$

因此,根据定理 2-4, U 和 V 的联合密度函数是

$$g(u,v) = \begin{cases} \dfrac{(v^{2/3}u^{-1/3})(u^{2/3}v^{-1/3})}{96}\left(\dfrac{1}{3}u^{-2/3}v^{-2/3}\right), & v^2 < 64u,\ v < u^2 < 125v \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

或

$$g(u,v) = \begin{cases} u^{-1/3}v^{-1/3}/288, & v^2 < 64u, \quad v < u^2 < 125v \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

卷积

2.23 随机变量 X 和 Y 具有联合密度函数 $f(x,y)$.

证明 ☞ $U = X + Y$ 的密度函数是

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v, u-v)dv$$

方法 1 令 $U = X + Y$, $V = X$, 这里的第 2 个方程式是任意加的,对应于它们,我们有 $u = x + y$, $v = x$ 或 $x = v$, $y = u - v$. 该变换的雅可比行列式由下式给出:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

因此,根据定理 2-4, U 和 V 的联合密度函数是

$$g(u,v) = f(v, u-v)$$

从而由(26)式得到 U 的边缘密度函数是

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v, u-v)dv$$

方法 2 $U = X + Y$ 的分布函数是等于由 $x + y \leqslant u$ 确定的区域上 $f(x,y)$ 的二重积分,即

$$G(u) = \iint_{x+y\leqslant u} f(x,y)dxdy$$

由于该区域在直线 $x + y = u$ 的下面,正如图 2-16 中的阴影部分所示,我们知道

$$G(u) = \int_{x=-\infty}^{\infty}\left[\int_{y=-\infty}^{u-x} f(x,y)dy\right]dx$$

U 的密度函数是 $G(u)$ 对 u 的导数且由下式给出:

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, u-x)dx$$

首先对 x 积分,然后对 y 积分,利用(12)式.

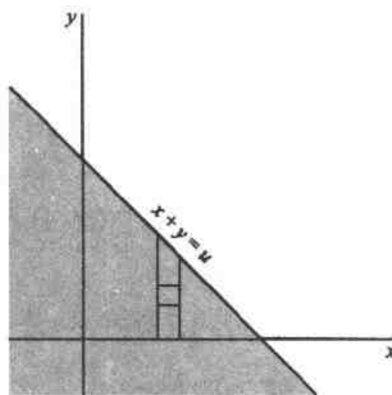


图 2-16

2.24 若独立的随机变量分别有密度函数 $f_1(x)$, $f_2(y)$, 解习题 2.23.

解 ☞ 在这种情形中,该联合密度函数是 $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, 因此根据习题 2.23, $U = X + Y$ 的密度函数是

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(v)f_2(u-v)dv = f_1 * f_2$$

这是 f_1 与 f_2 的卷积.

2.25　若独立的随机变量 X 和 Y 有密度函数

$$f_1(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases},\quad f_2(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, & y\geqslant 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

求它们和的密度函数，$U=X+Y$.

解 ☞ 根据习题 2.24，所求密度函数是 f_1 和 f_2 的卷积且由下式给出：

$$g(u)=f_1*f_2=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(v)f_2(u-v)dv$$

当 $v<0$ 时被积函数 f_1 等于 0，当 $v>u$ 时，f_2 等于 0，因此，若 $u\geqslant 0$ 时

$$g(u)=\int_0^u(2e^{-2v})(3e^{-3(u-v)})dv$$

$$=6e^{-3u}\int_0^u e^v dv=6e^{-3u}(e^u-1)=6(e^{-2u}-e^{-3u})$$

若 $u<0$ 时，$g(u)=0$.

检验：$\int_{-\infty}^{\infty}g(u)du=6\int_0^{\infty}(e^{-2u}-e^{-3u})du=6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1$

2.26　证明 $f_1*f_2=f_2*f_1$.

证明 ☞ 我们有

$$f_1*f_2=\int_{v=-\infty}^{\infty}f_1(v)f_2(u-v)dv$$

令 $w=u-v$，因此 $v=u-w$，$dv=-dw$，我们得到

$$f_1*f_2=\int_{w=\infty}^{-\infty}f_1(u-w)f_2(w)(-dw)=\int_{w=-\infty}^{\infty}f_2(w)f_1(u-w)dw=f_2*f_1$$

条件分布

2.27　求习题 2.8 中的分布的(a)$f(y|2)$，(b)$P(Y=1|X=2)$.

解 ☞ (a)利用习题 2.8 和 2.9 中的结果，我们有

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{(2x+y)/42}{f_1(x)}$$

因此，取 $x=2$ 得到

$$f(y|2)=\frac{(4+y)/42}{11/21}=\frac{4+y}{22}$$

(b)
$$P(Y=1|X=2)=f(1|2)=\frac{5}{22}$$

2.28　若 X 和 Y 有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{4}+xy, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(a)$f(y|x)$，(b)$P\left(Y>\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}+dx\right)$.

解 ☞ (a)对 $0<x<1$，

$$f_1(x)=\int_0^1\left(\frac{3}{4}+xy\right)dy=\frac{3}{4}+\frac{x}{2}$$

和

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\begin{cases}\frac{3+4xy}{3+2x}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他的 } y\end{cases}$$

对 x 的其他值，$f(y|x)$没有定义.

(b)
$$P\left(Y>\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}+dx\right)=\int_{1/2}^{\infty}f\left(y\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)dy=\int_{1/2}^{1}\frac{3+2y}{4}dy=\frac{9}{16}$$

2.29 随机变量 X 和 Y 的联合密度函数由下式给出：

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求(a) X 的边缘密度，(b) Y 的边缘密度，(c) X 的条件密度，(d) Y 的条件密度.

解 ☞ 在图 2-17 里的阴影部分所描述的区域上，$f(x,y)\neq 0$.

(a)为得到 X 的边缘密度，我们固定 x，对 y 从 0 到 x 积分，正如在图 2-17 里用竖条所表示的. 该结果是

$$f_1(x)=\int_{y=0}^{x}8xydy=4x^3$$

这里 $0<x<1$. 对 x 的所有的其他值，$f_1(x)=0$.

(b)类似地，固定 y，对 x 从 $x=y$ 到 $x=1$ 积分就得到 Y 的边缘密度，正如在图 2-17 里用水平条所表示的. 对 $0<y<1$，该结果是

$$f_2(y)=\int_{x=y}^{1}8xydx=4y(1-y^2)$$

对 y 的所有的其他值，$f_2(y)=0$.

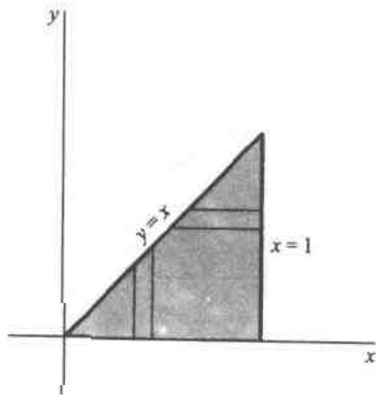


图 2-17

(c)对 $0<y<1$，X 的条件密度函数是

$$f_1(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\begin{cases}2x/(1-y^2), & y\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 其他的\ x\end{cases}$$

当 $f_2(y)=0$ 时，该条件密度函数无定义.

(d)对 $0<x<1$，Y 的条件密度函数是

$$f_2(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\begin{cases}2y/x^2, & 0\leqslant y\leqslant x\\ 0, & 其他的\ y\end{cases}$$

当 $f_1(x)=0$ 时，该条件密度函数无定义.

检验：

$$\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1 4x^3dx=1,\quad \int_0^1 f_2(y)dy=\int_0^1 4y(1-y^2)dy=1$$

$$\int_y^1 f_1(x\mid y)dx=\int_y^1\frac{2x}{1-y^2}dx=1,\quad \int_0^x f_2(y\mid x)dy=\int_0^x\frac{2y}{x^2}dy=1$$

2.30 确定习题 2.29 中的随机变量是否是独立的.

解 ☞ 在图 2-17 的阴影区域内，$f(x,y)=8xy$. $f_1(x)=4x^3$，$f_2(y)=4y(1-y^2)$. 因此，$f(x,y)\neq f_1(x)f_2(y)$，于是 X 和 Y 是不独立的.

应该指出，不能把 $f(x,y)=8xy$ 表示成一元 x 的函数与一元 y 的函数乘积的结论，是由于出现限制 $0\leqslant y\leqslant x$. 若换成 y 不依赖 x 的限制(像习题 2.21)，这样的结论就有效了.

几何概率的应用

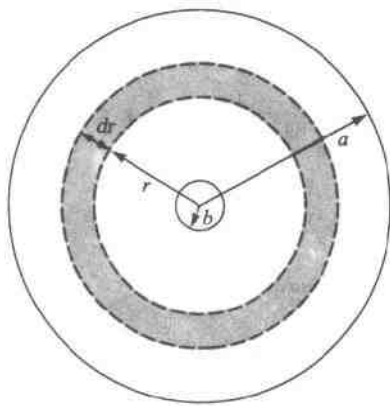


图 2-18

2.31 玩标枪人击中点在 r 与 $r+dr$ 之间的概率是

$$P(r\leqslant R\leqslant r+dr)=c\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]dr$$

这里，R 是从靶的中心到击中点的距离，c 是常数，a 是靶的半径(见图 2-18). 求击中靶心的概率，假设靶心具有半径 b. 且假设总能击中靶.

解 ☞ 该密度函数由下式给出

$$f(r)=c\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$$

由于靶总被击中，我们有

$$c\int_0^a\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]dr = 1$$

从而 $c=3/2a$.则击中靶心的概率是

$$\int_0^b f(r)dr = \frac{3}{2a}\int_0^b\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]dr = \frac{b(3a^2-b^2)}{2a^3}$$

2.32 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内随机地选两个点.确定它们的平方和不超过 1 的概率.

解 ☞ 令 X 和 Y 表示与给定的点相关的随机变量.由于假设相等的区间有相等的概率,X 和 Y 的密度函数分别由下式给出:

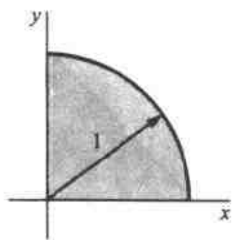


图 2-19

(1) $f_1(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}$, $\quad f_2(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

由于 X 和 Y 是独立的,则联合密度函数由下式给出:

(2) $$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

从而所求的概率是

(3) $$P(X^2+Y^2\leqslant 1)=\iint_{\mathscr{R}} dxdy$$

这里 $\mathscr{R}$ 是由 $x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 确定的区域,它是半径为 1 的 1/4 圆(见图 2-19).由于(3)式代表 $\mathscr{R}$ 的面积,我们知道所求概率是 $\pi/4$.

综合问题

2.33 假设随机变量 X 和 Y 有由下式给出的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}c(2x+y), & 2<x<6, 0<y<5\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求(a)常数 c,(b)X 和 Y 的边缘分布函数,(c)X 和 Y 的边缘密度函数,(d)$P(3<X<4, Y>2)$,(e)$P(X>3)$,(f)$P(X+Y>4)$,(g)联合分布函数,(h)X 和 Y 是否是独立的.

解 ☞ (a)总概率由下式给出:

$$\int_{x=2}^6\int_{y=0}^5 c(2x+y)dxdy = \int_{x=2}^6 c\left(2xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^5 dx$$

$$=\int_{x=2}^6 c\left(10x+\frac{25}{2}\right)dx = 210c$$

它等于 1,从而 $c=1/210$.

(b)X 的边缘分布函数是

$$F_1(x)=P(X\leqslant x)=\int_{u=-\infty}^x\int_{v=-\infty}^{\infty} f(u,v)dudv$$

$$=\begin{cases}\int_{u=-\infty}^x\int_{v=-\infty}^{\infty} 0dudv = 0, & x<2\\ \int_{u=2}^x\int_{v=0}^5 \frac{2u+v}{210}dudv = \frac{2x^2+5x-18}{84}, & 2\leqslant x<6\\ \int_{u=2}^6\int_{v=0}^5 \frac{2u+v}{210}dudv = 1, & x\geqslant 6\end{cases}$$

Y 的边缘分布函数是

$$F_2(y)=P(Y\leqslant y)=\int_{u=-\infty}^{\infty}\int_{v=-\infty}^y f(u,v)dudv$$

$$=\begin{cases}\int_{u=-\infty}^{\infty}\int_{v=-\infty}^y 0dudv = 0, & y<0\\ \int_{u=2}^6\int_{v=0}^y \frac{2u+v}{210}dudv = \frac{y^2+16y}{105}, & 0\leqslant y<5\\ \int_{u=2}^6\int_{v=0}^5 \frac{2u+v}{210}dudv = 1, & y\geqslant 5\end{cases}$$

(c)由(b)得到 X 的边缘密度函数是

$$f_1(x)=\frac{d}{dx}F_1(x)=\begin{cases}(4x+5)/84, & 2<x<6\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由(b)得到 Y 的边缘密度函数是

$$f_2(y)=\frac{d}{dy}F_2(y)=\begin{cases}(2y+16)/105, & 0<y<6\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(d)

$$P(3<X<4,Y>2)=\frac{1}{210}\int_{x=3}^{4}\int_{y=2}^{5}(2x+y)dxdy=\frac{3}{20}$$

(e)

$$P(X>3)=\frac{1}{210}\int_{x=3}^{6}\int_{y=0}^{5}(2x+y)dxdy=\frac{23}{28}$$

(f)

$$P(X+Y>4)=\iint\limits_{\mathscr{R}}f(x,y)dxdy$$

这里 $\mathscr{R}$ 是图 2-20 的阴影区域. 利用下式:

$$P(X+Y>4)=1-P(X+Y\leqslant 4)=1-\iint\limits_{\mathscr{R}'}f(x,y)dxdy$$

这里 $\mathscr{R}'$ 如图 2-20 所示. 我们有

$$P(X+Y\leqslant 4)=\frac{1}{210}\int_{x=2}^{4}\int_{y=0}^{4-x}(2x+y)dxdy=\frac{2}{35}$$

于是 $P(X+Y>4)=33/35$.

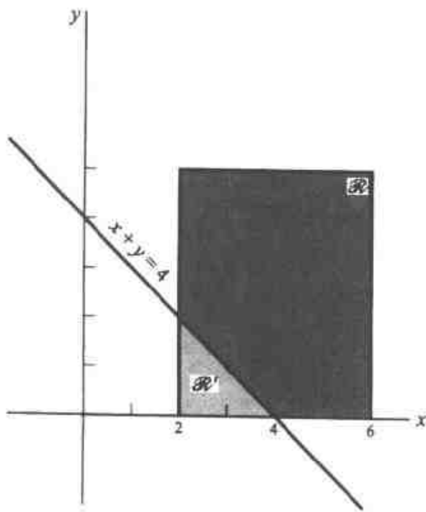


图 2-20

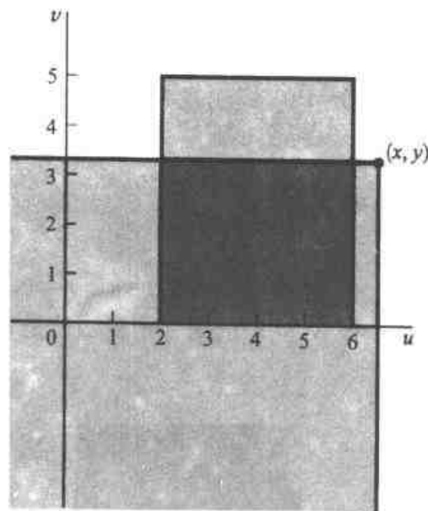


图 2-21

(g)联合分布函数是

$$F(x,y)=P(X\leqslant x,Y\leqslant y)=\int_{u=-\infty}^{x}\int_{v=-\infty}^{y}f(u,v)dudv$$

在 uv 平面内的积分区域是$\frac{1}{4}$平面 $u\leqslant x$, $v\leqslant y$ 与矩形 $2<u<6$, $2<v<5$ 的相交区域(见图 2-21, 在它上面 $f(u,v)\neq 0$). 我们有

$$F(x,y)=\int_{u=2}^{6}\int_{v=0}^{y}\frac{2u+v}{210}dudv=\frac{16y+y^2}{105}$$

当(x,y)在矩形内部时, 我们得到另一个表达式, 等等. 全部的结果显示在图 2-22 里.

(h)由于

$$f(x,y)\neq f_1(x)f_2(y)$$

或等价地, $F(x,y)\neq F_1(x)F_2(y)$, 该随机变量是不独立的.

2.34　令 X 有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

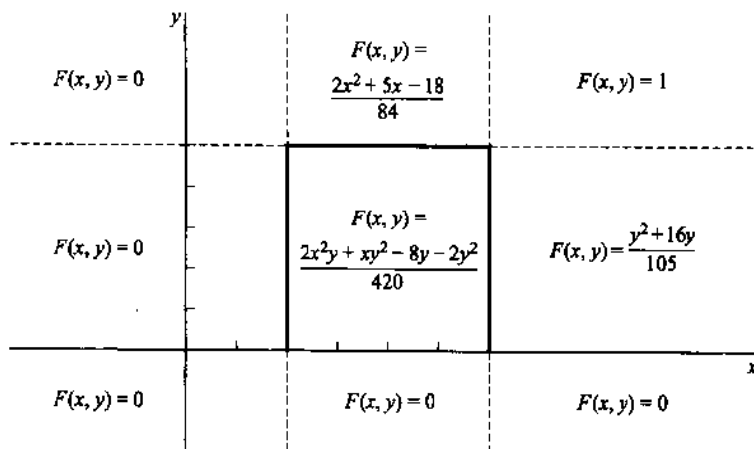


图 2-22

求函数 $Y = h(X)$,使它有密度函数

$$g(y) = \begin{cases} 12y^3(1 - y^2), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

解 ☞ 我们假设未知函数 h 在区间 $X \leqslant x$ 和 $Y \leqslant y = h(x)$ 上是一一对应的,连续的.则 $P(X \leqslant x) = P(Y \leqslant y)$,即 X 与 Y 的分布函数必相等.于是,对 $0 < x, y < 1$,

$$\int_0^x 6u(1 - u)du = \int_0^y 12v^3(1 - v^2)dv$$

或

$$3x^2 - 2x^3 = 3y^4 - 2y^6$$

通过检验,$x = y^2$ 或 $y = h(x) = +\sqrt{x}$ 是解,且这个解具有要求的性质.故 $Y = +\sqrt{X}$.

2.35 若 X 和 Y 的联合密度函数是 $f(x, y)$,求 $U = XY$ 的密度函数.

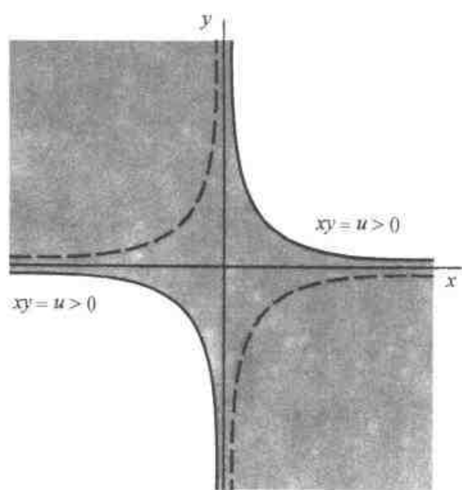


图 2-23

解 ☞ **方法 1** 令 $U = XY$, $V = X$,它们对应于 $u = xy$, $v = x$ 或 $x = v$, $y = u/v$.则雅可比行列式由下式给出:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ v^{-1} & -uv^{-2} \end{vmatrix} = -v^{-1}$$

于是 U 和 V 的联合密度函数是

$$g(u, v) = \frac{1}{|v|} f\left(v, \frac{u}{v}\right)$$

根据上式,就可得到 U 的边缘密度函数

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u, v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|v|} f\left(v, \frac{u}{v}\right)dv$$

方法 2 U 的分布函数是

$$G(u) = \iint_{xy \leqslant u} f(x, y)dxdy$$

$u \geqslant 0$,在图 2-23 里的阴影部分显示出积分区域.我们知道

$$G(u) = \int_{-\infty}^0 \left[\int_{u/x}^{\infty} f(x, y)dy\right]dx + \int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{u/x} f(x, y)dy\right]dx$$

对 u 求导,我们得到

$$g(u) = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{-1}{x}\right) f\left(x, \frac{u}{x}\right)dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{u}{x}\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{u}{x}\right)dx$$

当积分区域是以图 2-23 里的双曲线为界时，对 $u<0$ 可得同样的结果.

2.36 地板上有若干相互平行的，距离为 l 的直线. 一根长度为 $a<l$ 的针随机地落在地板上. 求该针与一条直线相交的概率(这个问题是著名的蒲丰(Buffon)针问题).

解 令 X 是随机变量，它给出针的中点到最近的直线的距离(图 2-24). 令 Θ 是随机变量，它给出该针(或其延长)与该直线间的锐角. 我们用 x 和 θ 表示 X 和 Θ 的特殊值. 显然，X 可取 0 与 $l/2$ 间的任一值，因此，$0\leqslant x\leqslant l/2$，$\Theta$ 也可取 0 与 $\pi/2$ 间的任一值，从而有

$$P(x<X\leqslant x+dx)=\frac{2}{l}dx,\quad P(\theta\leqslant\Theta+d\theta)=\frac{2}{\pi}d\theta$$

即，X 和 Θ 的密度函数由 $f_1(x)=2/l$，$f_2(\theta)=2/\pi$ 给出. 我们注意到

$$\int_0^{l/2}\frac{2}{l}dx=1,\quad\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\pi}d\theta=1$$

由于 X 和 Θ 是独立的，所以其联合密度函数是

$$f(x,\theta)=\frac{2}{l}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{4}{l\pi}$$

从图 2-24 可看出，当 $X\leqslant(a/2)\sin\Theta$ 时，该针击中一条直线. 这个事件的概率由下式给出：

$$\frac{4}{l\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{x=0}^{(a/2)\sin\theta}dxd\theta=\frac{2a}{l\pi}$$

当以上的表示等于在实践中观察到的击中频率时，可得到 π 的实际值. 这表明以上描述的概率模型是合适的.

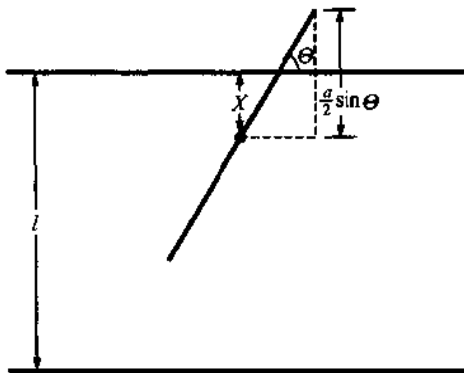


图 2-24

2.37 两个人同意在下午 2:00 与 3:00 之间见面，每一个人等另一个人不超过 15 分钟. 问他们见面的概率是什么?

解 令随机变量 X 和 Y 分别代表两个到达的时间，下午 2:00 之后的一个小时用分数度量. 假设时间的相等区间内有到达的相等概率，X 和 Y 的密度函数分别由下式给出：

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_2(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由于 X 和 Y 是独立的，则其联合密度函数是

(1)
$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由于 15 分钟 $=\frac{1}{4}$ 小时，则所求的概率是

(2)
$$P\left(|X-Y|\leqslant\frac{1}{4}\right)=\iint_{\mathscr{R}}dxdy$$

这里 $\mathscr{R}$ 是图 2-25 里的阴影部分表出的区域. (2)的右边是该区域的面积，它等于 $1-\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=$

$\frac{7}{16}$,由于正方形的面积为 1,而两个角的三角形的面积各为$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$.所以所求的概率是 7/16.

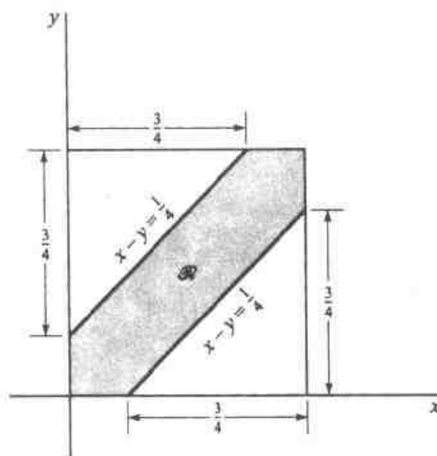


图 2-25

补 充 习 题

离散随机变量和概率分布

2.38　一个硬币被抛掷 3 次.若 X 是一个随机变量,它给出出现正面的数,构造一个表以描述 X 的概率分布.

2.39　一个罐里有 5 颗白的和 3 颗黑的弹子.若随机地无放回地抽取 2 颗弹子,X 表示白的弹子的个数,求 X 的概率分布.

2.40　做习题 2.39,若有放回地抽取弹子.

2.41　对一个均匀的硬币抛掷两次,令 Z 是随机变量,它给出正面数减去反面数.求 Z 的概率分布.用这个结果对例 2.1 和 2.2 作比较.

2.42　从 52 张桥牌中随机地抽取 4 张,令 X 是随机变量,它给出上述 4 张中 A 的张数.构造一个表以表述 X 的概率分布.

离散的分布函数

2.43　对表 2-7 里表述的随机变量 X 的概率函数,构造一个表以给出 X 的分布函数.

表 2-7

x	1	2	3
$f(x)$	1/2	1/3	1/6

表 2-8

x	1	2	3	4
$F(x)$	1/8	3/8	3/4	1

2.44　求(a)习题 2.38,(b)习题 2.39,(c)习题 2.40 的分布函数.

2.45　求(a)习题 2.41,(b)习题 2.42 的分布函数.

2.46　表 2-8 表明随机变量 X 的分布函数.确定(a)概率函数,(b)$P(1\leqslant X\leqslant 3)$,(c)$P(X\geqslant 2)$,(d)$P(X<3)$,(e)$(X>1.4)$.

连续的随机变量和概率分布

2.47　随机变量 X 有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}ce^{-3x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

求(a)常数 c,(b)$P(1<X<2)$,(c)$P(X\geqslant 3)$,(d)$P(X<1)$.

2.48　求习题2.47的随机变量的分布函数.用图形表示密度和分布函数,描述它们之间的关系.

2.49　随机变量 X 有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}cx^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ cx, & 2<x<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(a)常数 c,(b)$P(X>2)$,(c)$P(1/2<X<3/2)$.

2.50　求习题2.49的随机变量 X 的分布函数.

2.51　随机变量 X 的分布函数由下式给出:

$$F(x)=\begin{cases}cx^3, & 0\leqslant x<3\\ 1, & x\geqslant 3\\ 0, & x<0\end{cases}$$

若 $P(X=3)=0$,求(a)常数 c,(b)密度函数,(c)$P(X>1)$,(d)$P(1<x<2)$.

2.52　函数

$$F(x)=\begin{cases}c(1-x^2), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

能是分布函数吗?作出解释.

2.53　令 X 是随机变量,它具有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}cx, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(a)常数 c 的值,(b)$P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)$,(c)$P(X>1)$,(d)分布函数.

联合分布和独立变量

2.54　两个离散的随机变量 X 和 Y 的联合概率函数由下式给出:

$$f(x,y)=\begin{cases}cxy, & x=1,2,3,\ y=1,2,3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(a)常数 c,(b)$P(X=2,Y=3)$,(c)$P(1\leqslant X\leqslant 2,Y\leqslant 2)$,(d)$P(X\geqslant 2)$,(e)$P(Y<2)$,(f)$P(X=1)$,(g)$P(Y=3)$.

2.55　对习题2.54的随机变量,求(a)X 和(b)Y 的边缘概率函数,(c)确定 X 和 Y 是否是独立的.

2.56　令 X 和 Y 是连续的随机变量,它们有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}c(x^2+y^2), & 0\leqslant x<1,0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

确定(a)常数 c,(b)$P\left(X<\frac{1}{2},Y>\frac{1}{2}\right)$,(c)$P\left(\frac{1}{4}<X<\frac{3}{4}\right)$,(d)$P\left(Y<\frac{1}{2}\right)$,(e)$X$ 和 Y 是否是独立的.

2.57　对习题2.56的密度函数,求(a)X 和(b)Y 的边缘分布函数.

条件分布和密度函数

2.58　对习题2.54的分布,求(a)给定 Y 时 X 的,(b)给定 X 时 Y 的条件概率函数.

2.59　令

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(a)给定 Y 时 X 的和(b)给定 X 时 Y 的条件密度函数.

2.60　对习题2.56的分布和求(a)给定 Y 时 X 的和(b)给定 X 时 Y 的条件密度.

2.61　令

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

是 X 和 Y 的联合密度函数.求(a)给定 Y 时 X 的和(b)给定 X 时 Y 的条件密度函数.

变量替换

2.62 令 X 有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

求 $Y=X^2$ 的密度函数.

2.63 (a)若 X 的密度函数是 $f(x)$,求 X^3 的密度函数.(b)在(a)中选择

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x\geqslant 0\\0, & x<0\end{cases}$$

说明所得结果,并检验答案.

2.64 若 X 有密度函数 $f(x)=(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$, $-\infty<x<\infty$,求 $Y=X^2$ 的密度函数.

2.65 检验习题 2.21 中的方法 1 的 $g_1(u)$ 的积分等于 1.

2.66 若 X 的密度是 $f(x)=1/\pi(x^2+1)$, $-\infty<x<\infty$,求 $Y=\arctan X$ 的密度.

2.67 完成习题 2.21 中的方法 2 求 $g_1(u)$ 所需的工作,并检验你的答案.

2.68 令 X 的密度是

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<1\\0, & 其他\end{cases}$$

求(a)$3X-2$ 和(b)X^3+1 的密度.

2.69 用直接积分的方法检验习题 2.22 中求出的联合密度函数.

2.70 令 X 和 Y 有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x\geqslant 0, y\geqslant 0\\0, & 其他\end{cases}$$

若 $U=X/Y$, $V=X+Y$,求 U 和 V 的联合密度函数.

2.71 利用习题 2.22 求(a)$U=XY^2$ 和(b)$V=X^2Y$ 的密度函数.

2.72 令 X 和 Y 是随机变量,它具有联合密度函数 $f(x,y)=(2\pi)^{-1}e^{-(x^2+y^2)}$, $-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$. 若 R 和 Θ 是新的随机变量, $X=R\cos\Theta$, $Y=R\sin\Theta$,指明 R 的密度函数是

$$g(r)=\begin{cases}re^{-r^2/2}, & r\geqslant 0\\0, & r<0\end{cases}$$

2.73 令

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\\0, & 其他\end{cases}$$

是 X 和 Y 的联合密度函数.求 $Z=XY$ 的密度函数.

卷积

2.74 令 X 和 Y 是独立同分布的随机变量,它们有密度函数

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant 1\\0, & 其他\end{cases}$$

求 $X+Y$ 的密度函数并检验你的答案.

2.75 令 X 和 Y 是独立同分布的随机变量,它们有密度函数

$$f(t)=\begin{cases}e^{-t}, & t\geqslant 0\\0, & 其他\end{cases}$$

求 $X+Y$ 的密度函数并检验你的答案.

2.76 在习题 2.21 中,首先作变换 $2Y=Z$,然后利用卷积求 $U=X+Z$ 的密度函数.

2.77 若 X_1 和 X_2 是独立同分布的随机变量,它们有密度函数

$$f(t)=\begin{cases}te^{-t}, & t\geqslant 0\\0, & t<0\end{cases}$$

求 X_1+X_2 的密度函数.

几何概率的应用

2.78　在一条直线段上随机地选两点,它的长度是 $a>0$.求这样得到的 3 条直线段形成三角形的边的概率.

2.79　已知公共汽车将在下午 3:00 与 3:30 之间随机地到达某确定的站.某人决定他将在这两个时间之间随机地去该站等公共汽车,最多等 5 分钟.若他没乘着公共汽车就乘地铁.问他乘地铁的概率是什么?

2.80　两个线段 AB 和 CD,其长度分别为 8 和 6.在 AB 和 CD 上分别随机地选取两个点 P 和 Q.描述以 AP 为高,CQ 为底的三角形的面积大于 12 的概率等于 $(1-\ln 2)/2$.

综合问题

2.81　设 $f(x)=c/3^x, x=1,2,\cdots$是随机变量 X 的概率函数.(a)确定 c,(b)求分布函数,(c)作概率函数和分布函数的图形,(d)求 $P(2\leqslant X<5)$,(e)求 $P(X\geqslant 3)$.

2.82　设

$$f(x)=\begin{cases}cxe^{-2x}, & x\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

是随机变量 X 的密度函数,(a)确定 c,(b)求分布函数,(c)作密度函数和分布函数的图形,(d)求 $P(X\geqslant 1)$,(e)求 $P(2\leqslant X<3)$.

2.83　随机变量 X 的概率函数由下式给出:

$$f(x)=\begin{cases}2p, & x=1\\ p, & x=2\\ 4p, & x=3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

这里 p 是常数.求(a)$P(0\leqslant X<3)$,(b)$P(X>1)$.

2.84　(a)证明对合适的常数 c,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ c(1-e^{-x})^2, & x>0\end{cases}$$

是随机变量 X 的分布函数,并求 c.(b)确定 $P(1<X<2)$.

2.85　随机变量 X 有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}(1-x^2), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求随机变量 $Y=X^2$ 的密度函数并检验你的答案.

2.86　两个独立的随机变量 X 和 Y,各自的密度函数是

$$f(x)=\begin{cases}c_1e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases},\quad g(y)=\begin{cases}c_2ye^{-3y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

求(a)c_1 和 c_2,(b)$P(X+Y>1)$,(c)$P(1<X<2, Y\geqslant 1)$,(d)$P(1<X<2)$,(e)$P(Y\geqslant 1)$.

2.87　在习题 2.86 中,答案(c),(d)和(e)之间的关系是什么?证明你的结果.

2.88　令 X 和 Y 是随机变量,它们有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}c(2x+y), & 0<x<1,\ 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(a)常数 c,(b)$P\left(X>\frac{1}{2}, Y<\frac{3}{2}\right)$,(c)$X$ 的(边缘)密度函数,(d)Y 的(边缘)密度函数.

2.89　在习题 2.88 中,是 $P\left(X>\frac{1}{2}, Y<\frac{3}{2}\right)=P\left(X>\frac{1}{2}\right)P\left(Y<\frac{3}{2}\right)$吗?为什么?

2.90　在习题 2.86 中,求(a)X^2 和(b)$X+Y$ 的密度函数.

2.91　令 X 和 Y 有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1/y, & 0<x<y,\ 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(a)确定 X 和 Y 是否是独立的,(b)求 $P\left(X>\frac{1}{2}\right)$,(c)求 $P\left(X<\frac{1}{2}, Y>\frac{1}{3}\right)$,(d)求$P\left(X+Y>\frac{1}{2}\right)$.

2.92　推广(a)习题 2.74 和(b)习题 2.75 到 3 或更多个变量的情形.

2.93 令 X 和 Y 是独立同分布的随机变量,它们有密度函数 $f(u)=(2\pi)^{-1/2}e^{-u^2/2}$, $-\infty<u<\infty$.求 $Z=X^2+Y^2$ 的密度函数

2.94 随机变量 X 和 Y 的联合概率函数由表 2-9 给出.(a)求 X 和 Y 的边缘概率函数.(b)求$P(1\leqslant X<3, Y\geqslant 1)$.(c)确定 X 和 Y 是否独立.

表 2-9

X \ Y	0	1	2
0	1/18	1/9	1/6
1	1/9	1/18	1/9
2	1/6	1/6	1/18

2.95 设随机变量 X 和 Y 的联合概率函数由下式给出:

$$f(x,y)=\begin{cases}cxy, & 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(a)确定 X 和 Y 是否是独立的,(b)求 $P\left(\frac{1}{2}<X<1\right)$,(c)求 $P(Y\geqslant 1)$,(d)求$P\left(\frac{1}{2}<X<1, Y\geqslant 1\right)$.

2.96 令 X 和 Y 是独立的随机变量,它们都有密度函数

$$f(u)=\frac{\lambda^u e^{-\lambda}}{u!},\quad u=0,1,2,\cdots$$

这里 $\lambda>0$.证明 $X+Y$ 的密度函数是

$$g(u)=\frac{(2\lambda)^u e^{-2\lambda}}{u!},\quad u=0,1,2,\cdots$$

2.97 将长度为 L 的棒分成两部分,一部分的长度大于另一部分两倍的概率是什么?清楚地陈述你已经做出的假设.讨论你的假设是否是真实的,并且若它们不是真实的时,你如何改进.

2.98 地板是由边长 l 的正方形构成的.一根长 $a<l$ 的针被投掷在该地板上.证明至少该针横截正方形的一条边的概率等于 $a(4l-a)/\pi l^2$.

2.99 在习题 2.98 中,对一个给定长度的针,为使横截的概率最大,正方形的边应该是什么?解释你的答案.

2.100 令

$$f(x,y,z)=\begin{cases}24xy^2z^3, & 0<x<1, 0<y<1, 0<z<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

是 3 个随机变量 X, Y 和 Z 的联合密度函数.求(a)$P\left(X>\frac{1}{2}, Y<\frac{1}{2}, Z>\frac{1}{2}\right)$,(b)$P(Z<X+Y)$.

2.101 一个半径为 a 的粒子圆柱形的流被直接射向中心为 O 的半球面的靶 ABC(见图 2-26).假设粒子的分布由下式给出:

$$f(r)=\begin{cases}1/a, & 0<r<a\\ 0, & 其他\end{cases}$$

这里,r 是到 OB 轴的距离.说明粒子沿着靶的分布由下式表出:

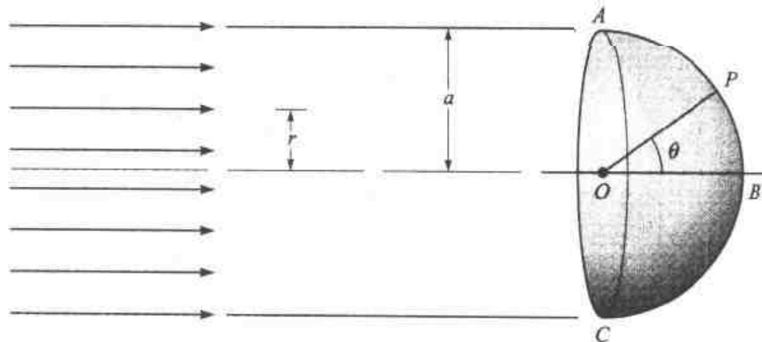


图 2-26

$$g(\theta)=\begin{cases}\cos\theta, & 0<\theta<\pi/2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

这里，θ 是直线 OP 与轴之间的夹角.

2.102　求习题 2.101 中的一个粒子击中 $\theta=0$ 与 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 之间的靶的概率.

2.103　设随机变量 X, Y 和 Z 具有联合密度函数

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-\cos\pi x\cos\pi y\cos\pi z, & 0<x<1,0<y<1,0<z<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

指出尽管这些随机变量中的任两个是独立的，但这 3 个随机变量是不独立的，即，它们的边缘密度函数因子对所有的 3 个是不独立的.

习题答案

2.38

x	0	1	2	3
$f(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

2.39

x	0	1	2
$f(x)$	3/28	15/28	5/14

2.40

x	0	1	2
$f(x)$	9/64	15/32	25/64

2.42

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{194\,580}{270\,725}$	$\frac{69\,184}{270\,725}$	$\frac{6\,768}{270\,725}$	$\frac{192}{270\,725}$	$\frac{1}{270\,725}$

2.43

x	0	1	2	3
$F(x)$	1/8	1/2	7/8	1

2.46　(a)

x	1	2	3	4
$f(x)$	1/8	1/4	3/8	1/4

(b)3/4，　(c)7/8，　(d)3/8，　(e)7/8

2.47　(a)3，　(b)$e^{-3}-e^{-6}$，　(c)e^{-9}，　(d)$1-e^{-3}$

2.48　$F(x)=\begin{cases}1-e^{-3x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$

2.49　(a)6/29，　(b)15/29，　(c)19/116

2.50　$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1\\ (2x^3-2)/29, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ (3x^2+2)/29, & 2\leqslant x\leqslant 3\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}$

2.51　(a)1/27，　(b)$f(x)=\begin{cases}x^2/9, & 0\leqslant x<3\\ 0, & 其他\end{cases}$，　(c)26/27，　(d)7/27

2.53　(a)1/2，　(b)1/2，　(c)3/4，　(d)$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x^2/4, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$

2.54　(a)1/36，(b)1/6，(c)1/4，(d)5/6，(e)1/6，(f)1/6，(g)1/2

2.55　(a)$f_1(x)=\begin{cases}x/6, & x=1,2,3\\ 0, & \text{另外的 } x\end{cases}$，(b)$f_2(y)=\begin{cases}y/6, & y=1,2,3\\ 0, & \text{另外的 } y\end{cases}$

2.56　(a)3/2，(b)1/4，(c)29/64，(d)5/16

2.57　(a)$F_1(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \frac{1}{2}(x^3+x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$，(b)$F_2(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0\\ \frac{1}{2}(y^3+y), & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 1, & y\geqslant 1\end{cases}$

2.58　(a)$f(x|y)=f_1(x)$，$y=1,2,3$(见习题 2.55)

(b)$f(y|x)=f_2(y)$，$x=1,2,3$(见习题 2.55)

2.59　(a)$f(x|y)=\begin{cases}(x+y)\Big/\left(y+\frac{1}{2}\right), & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{另外的 } x, 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$

(b)$f(y|x)=\begin{cases}(x+y)\Big/\left(x+\frac{1}{2}\right), & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 1, \text{另外的 } y\end{cases}$

2.60　(a)$f(x|y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\Big/\left(y^2+\frac{1}{3}\right), & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{另外的 } x, 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$

(b)$f(y|x)=\begin{cases}(x^2+y^2)\Big/\left(x^2+\frac{1}{3}\right), & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 1, \text{另外的 } y\end{cases}$

2.61　(a)$f(x|y)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ 0, & x<0, y\geqslant 0\end{cases}$，(b)$f(y|x)=\begin{cases}e^{-y}, & x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ 0, & x\geqslant 0, y<0\end{cases}$

2.62　$e^{-\sqrt{y}}/2\sqrt{y}$，$y>0$；0 其他

2.64　$(2\pi)^{-1/2}y^{-1/2}e^{-y/2}$，$y>0$；0 其他

2.66　$1/\pi$，$-\pi/2<y<\pi/2$；0 其他

2.68　(a)$g(y)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & -5<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，(b)$g(y)=\begin{cases}\frac{1}{6}(1-y)^{-2/3}, & 0<y<1\\ \frac{1}{6}(y-1)^{-2/3}, & 1<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

2.70　$ve^{-v}/(1+u)^2$，$u\geqslant 0, v\geqslant 0$；0 其他

2.73　$g(z)=\begin{cases}-\ln z, & 0<z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

2.74　$g(u)=\begin{cases}u, & 0\leqslant u\leqslant 1\\ 2-u, & 1\leqslant u\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

2.75　$g(u)=\begin{cases}ue^{-u}, & u\geqslant 0\\ 0, & u<0\end{cases}$

2.77　$g(x)=\begin{cases}x^3e^{-x}/6, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

2.78　1/4

2.79　61/72

2.81　(a)2，(b)$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 1-3^{-y}, & y\leqslant x<y+1, y=1,2,3,\cdots\end{cases}$，(d)26/81，(e)1/9

2.82　(a)4，(b)$F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}(2x+1), & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，(d)$3e^{-2}$　(e)$5e^{-4}-7e^{-6}$

2.83　(a)3/7，(b)5/7

2.84　(a)$c=1$，(b)$e^{-4}-3e^{-2}+2e^{-1}$

2.86　(a)$c_1=2, c_2=9$，(b)$9e^{-2}-14e^{-3}$，(c)$4e^{-5}-4e^{-7}$，(d)$e^{-2}-e^{-4}$，(e)$4e^{-3}$

2.88　(a)1/4，(b)27/64，(c)$f_1(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{2}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，(d)$f_2(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(y+1), & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

2.90　(a) $\begin{cases} e^{-2y}/\sqrt{y}, & y>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，(b) $\begin{cases} 18e^{-2u}, & u>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

2.91　(b) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$，(c) $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\ln 2$　(d) $\frac{1}{2}\ln 2$

2.93　$g(z)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-z/2}, & z\geqslant 0 \\ 0, & z<0 \end{cases}$

2.94　(b)7/18

2.95　(b)15/256，(c)9/16，(d)0

2.100　(a)45/512，(b)1/14

2.102　$\sqrt{2}/2$

第三章　数学期望

数学期望的定义

在概率统计里,数学期望是一个很重要的概念,数学期望就是一个随机变量的期望值,或简单地称为期望.可能取值为 $x_1,\cdots,x_n$ 的离散的随机变量 X 的期望定义为

$$E(X) = x_1P(X = x_1) + \cdots + x_nP(X = x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_jP(X = x_j) \tag{1}$$

若 $P(X=x_j)=f(x_j)$,则(1)式等价于

$$E(X) = x_1f(x_1) + \cdots + x_nf(x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_jf(x_j) = \sum xf(x) \tag{2}$$

这里,最后的和是对 x 的所有适当的值求得的和.作为(2)的一个特殊情况,那里的概率都是相等的,我们有

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \tag{3}$$

称它为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的算术平均,或简称平均.

若 X 取无限多个值 $x_1,x_2,\cdots$,假如该无穷级数绝对收敛,则 $E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_jf(x_j)$.

具有密度函数 $f(x)$ 的连续随机变量 X,假如该积分绝对收敛,X 的期望定义为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \tag{4}$$

当要了解一个特殊的随机变量时,常常称 X 的期望为 X 的均值,用 μ_X 或 μ 表示.

X 的均值或期望给出一个值,它扮演着 X 的代表或 X 的值的平均,因此,常称它为中心趋势的测度.另外的测度将在后面的条目里考虑.

例 3.1　设用一个匀称的骰子来玩游戏.在这样的游戏中,若骰子向上为 2 则玩游戏的人赢 20 美元,若向上为 4 则赢 40 美元,若向上为 6 则输 30 美元,若其他的面向上翻则玩游戏的人既不赢也不输.求赢得钱数的期望和.

解答　令 X 是给出在任何一次抛掷中赢得钱数的随机变量.当骰子向上为 $1,2,\cdots,6$ 时,可能赢得的钱数分别是 $x_1,x_2,\cdots,x_6$,而它们的概率是 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_6)$.在表 3-1 里表出 X 的概率函数.因此,期望值或期望是

$$E(X) = (0)\left(\frac{1}{6}\right) + (20)\left(\frac{1}{6}\right) + (0)\left(\frac{1}{6}\right) + (40)\left(\frac{1}{6}\right)(0)\left(\frac{1}{6}\right) + (-30)\left(\frac{1}{6}\right) = 5$$

表 3-1

x_j	0	+20	0	+40	0	−30
$f(x_j)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

从而玩游戏的人可期望赢 5 美元.因此在一个公正的游戏中,玩游戏的人为了参加游戏应当付 5 美元.

例 3.2　随机变量 X 的密度函数由下式给出:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则 X 的期望值是

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x\right)dx=\int_0^2\frac{x^2}{2}dx=\frac{x^3}{6}\bigg|_0^2=\frac{4}{3}$$

随机变量的函数

令 X 是具有概率函数 $f(x)$ 的离散的随机变量. 则 $Y=g(X)$ 也是离散的随机变量, 且 Y 的概率函数是

$$h(y)=P(Y=y)=\sum_{\{x\mid g(x)=y\}}P(X=x)=\sum_{\{x\mid g(x)=y\}}f(x)$$

若 X 取值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, Y 取值 $y_1,y_2,\cdots,y_m(m\leqslant n)$, 则

$$y_1h(y_1)+y_2h(y_2)+\cdots+y_mh(y_m)=g(x_1)f(x_1)+g(x_2)f(x_2)+\cdots+g(x_n)f(x_n)$$

因此

$$E[g(X)]=g(x_1)f(x_1)+g(x_2)f(x_2)+\cdots+g(x_n)f(x_n)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}g(x_j)f(x_j)=\sum g(x)f(x) \tag{5}$$

类似地, 若 X 是具有概率密度 $f(x)$ 的连续的随机变量, 则它可用下式表示:

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx \tag{6}$$

注意, (5)式与(6)式都不包含 $Y=g(X)$ 的概率函数和概率密度函数.

容易推广到两个或更多随机变量的函数. 例如, 若 X 和 Y 是具有联合密度函数 $f(x,y)$ 的两个连续的随机变量, 则 $g(X,Y)$ 的期望由下式给出:

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy \tag{7}$$

例 3.3 若 X 是例 3.2 中的随机变量,

$$E(3X^2-2X)=\int_{-\infty}^{\infty}(3x^2-2x)f(x)dx=\int_0^2(3x^2-2x)\left(\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{10}{3}$$

期望的若干定理

定理 3-1 若 c 是任一常数, 则

$$E(cX)=cE(X) \tag{8}$$

定理 3-2 若 X 和 Y 是任何随机变量, 则

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y) \tag{9}$$

定理 3-3 若 X 和 Y 是独立的随机变量, 则

$$E(XY)=E(X)E(Y) \tag{10}$$

容易推广这些定理.

方差和标准差

前面我们已经指明, 常常称随机变量 X 的期望为均值并用 μ 表示. 在概率统计里的另一个极重要的量, 我们称它为方差并由下式定义:

$$\mathrm{Var}(X)=E[(X-\mu)^2] \tag{11}$$

方差是一个非负的数. 称方差的正的平方根为标准差并由下式给出:

$$\sigma_X=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sqrt{E[(X-\mu)^2]} \tag{12}$$

常常用 σ 代替 σ_X 来表示标准差, 这时方差就是 σ^2.

若 X 是取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的离散的随机变量, 并具有概率函数 $f(x)$, 则方差由下式给出:

$$\sigma_X^2=E[(X-\mu)^2]=\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2f(x_j)=\sum(x-\mu)^2f(x) \tag{13}$$

在(13)式中,概率都相等的特殊情形,我们有

$$\sigma^2 = [(x_1-\mu)^2 + (x_2-\mu)^2 + \cdots + (x_n-\mu)^2]/n \tag{14}$$

它是 n 个数 $x_1, \cdots, x_n$ 的数集的方差.

若 X 取无限多个值 $x_1, x_2, \cdots$, 则 $\sigma_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty}(x_j-\mu)^2 f(x_j)$, 假如该级数收敛.

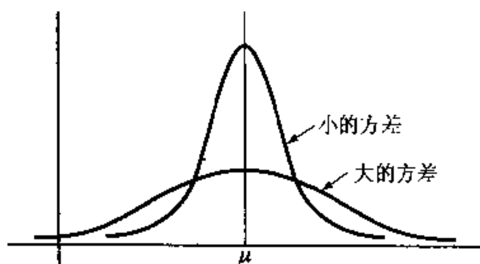


图 3-1

若 X 是具有密度函数 $f(x)$ 的连续的随机变量,则方差由下式给出:

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx \tag{15}$$

假如该积分收敛.

方差(或标准差)是随机变量的值关于均值 μ 的偏离或散布的测度.若随机变量的值趋向集中于均值附近,则方差就小;而若这些值趋向远离均值的地方,则方差就大.在图 3-1 中,从图形上表示出,具有相同均值 μ 的两个连续的分布的状态.

例 3.4 求例 3.2 中的随机变量的方差和标准差.

解 在例 3.2 中,求得的均值 $\mu = E(X) = 4/3$. 则方差由下式给出:

$$\sigma^2 = E\left[\left(X-\frac{4}{3}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 f(x)dx = \int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}x\right)dx = \frac{2}{9}$$

于是标准差是 $\sigma = \sqrt{2/9} = \sqrt{2}/3$.

注意到,若 X 有确定的尺度或单位,例如厘米,则 X 的方差有平方厘米单位,而标准差有与 X 相同的单位,即厘米单位.因此,常常用标准差.

方差的若干定理

定理 3-4 $\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$ (16)

这里 $\mu = E(X)$.

定理 3-5 若 c 是任一常数,

$$\mathrm{Var}(cX) = c^2\mathrm{Var}(X) \tag{17}$$

定理 3-6 当 $a = \mu = E(X)$ 时, $E[(X-a)^2]$ 是最小值.

定理 3-7 若 X 和 Y 是独立的随机变量,则

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \quad 或 \quad \sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \tag{18}$$

$$\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \quad 或 \quad \sigma_{X-Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \tag{19}$$

容易将定理 3-7 中的独立的随机变量推广到多于两个的情形.就是说,独立变量和的方差等于它们的方差的和.

标准化的随机变量

令 X 是带有均值 μ 和标准差 $\sigma(\sigma>0)$ 的随机变量.则我们用下式定义标准化的随机变量

$$X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \tag{20}$$

X^* 的一个重要性质是均值是 0 且方差为 1,这叫做标准化,即

$$E(X^*) = 0, \quad \mathrm{Var}(X^*) = 1 \tag{21}$$

有时把标准化的变量的值称之为标准得分,即 X 是用标准化单位来表示(即 σ 是在度量 $X-\mu$ 里取作一个单位).

标准化的变量对比较不同的分布是有用的.

矩

随机变量 X 关于均值 μ 的 r 阶矩也称为 r 阶中心矩，定义为

$$\mu_r = E[(X-\mu)^r] \tag{22}$$

这里 $r=0,1,2,\cdots$. 由此得到 $\mu_0=1$, $\mu_1=0$, $\mu_2=\sigma^2$, 等. 2 阶中心矩或关于均值的 2 阶矩是方差. 在假设绝对收敛的条件下，我们有

$$\mu_r = \sum (x-\mu)^r f(x) \qquad \text{（离散的变量）} \tag{23}$$

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x)dx \qquad \text{（连续的变量）} \tag{24}$$

X 关于原点的 r 阶矩也称为 r 阶原点矩，定义为

$$\mu'_r = E(X^r) \tag{25}$$

这里 $r=0,1,2,\cdots$，且在 $\mu=0$ 的情形，有类似于(23)和(24)的公式. 这些矩之间的关系由下式给出：

$$\mu_r = \mu'_r - \binom{r}{1}\mu'_{r-1}\mu + \cdots + (-1)^j\binom{r}{j}\mu'_{r-j}\mu^j + \cdots + (-1)^r\mu'_0\mu^r \tag{26}$$

利用 $\mu'_1=\mu$ 和 $\mu'_0=1$，对于特殊的情形，我们有

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu'_2 - \mu^2 \\ \mu_3 &= \mu'_3 - 3\mu'_2\mu + 2\mu^3 \\ \mu_4 &= \mu'_4 - 4\mu'_3\mu + 6\mu'_2\mu^2 - 3\mu^4 \end{aligned} \tag{27}$$

矩母函数

X 的矩母函数由下式定义：

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \tag{28}$$

在假设收敛的条件下，它是

$$M_X(t) = \sum e^{tx} f(x) \qquad \text{（离散的变量）} \tag{29}$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx \qquad \text{（连续的变量）} \tag{30}$$

我们可将它表示成泰勒(Taylor)级数(习题 3.15(a))

$$M_X(t) = 1 + \mu t + \mu'_2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \mu'_r\frac{t^r}{r!} + \cdots \tag{31}$$

由于这个表达式中的系数，可以使我们求出矩，因而叫做矩母函数. 根据这个表达式，我们可得到(习题 3.15(b))

$$\mu'_r = \left.\frac{d^r}{dt^r}M_X(t)\right|_{t=0} \tag{32}$$

即 μ'_r 是 $M_X(t)$ 的 r 阶导数在 $t=0$ 处的值. 我们常写 $M(t)$ 以代替 $M_X(t)$.

关于矩母函数的若干定理

定理 3-8　若 $M_X(t)$ 是随机变量 X 的矩母函数，a 和 $b(b\neq 0)$ 是常数，则 $(X+a)/b$ 的矩母函数是

$$M_{(X+a)/b}(t) = e^{at/b}M_X\left(\frac{t}{b}\right) \tag{33}$$

定理 3-9　若 X 和 Y 是分别具有矩母函数 $M_X(t)$ 和 $M_Y(t)$ 的独立的随机变量，则

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t) \tag{34}$$

容易将定理3-9推广到多于两个独立的随机变量的情形. 就是说，独立的随机变量的和的矩母

函数等于它们的矩母函数的乘积.

定理 3-10(惟一性定理) 设 X 和 Y 是分别具有矩母函数 $M_X(t)$ 和 $M_Y(t)$ 的随机变量.则当且仅当 $M_X(t)=M_Y(t)$ 恒等时 X 和 Y 有相同的概率分布.

特征函数

在矩母函数里,若令 $t=i\omega$,这里 i 是虚数单位,我们得到一个重要的函数,称它为特征函数.用下式表示:

$$\phi_X(\omega) = M_X(i\omega) = E(e^{i\omega X}) \tag{35}$$

从而

$$\phi_X(\omega) = \sum e^{i\omega x} f(x) \qquad (\text{离散的变量}) \tag{36}$$

$$\phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx \quad (\text{连续的变量}) \tag{37}$$

由于 $|e^{i\omega x}|=1$,所以该级数和积分总是绝对收敛.对应结果(31)和(32)变成

$$\phi_X(\omega) = 1 + i\mu\omega - \mu_2'\frac{\omega^2}{2!} + \cdots + i^r\mu_r'\frac{\omega^r}{r!} + \cdots \tag{38}$$

这里

$$\mu_r' = (-1)^r i^r \frac{d^r}{d\omega^r}\phi_X(\omega)\bigg|_{\omega=0} \tag{39}$$

在不可能出现混乱时,我们常写 $\phi(\omega)$ 以代替 $\phi_X(\omega)$.

对于特征函数相应于定理 3-8,3-9 和 3-10 的定理如下.

定理 3-11 若 $\phi_X(\omega)$ 是随机变量 X 的特征函数,a 和 $b(b\neq0)$ 是常数,则 $(X+a)/b$ 的特征函数是

$$\phi_{(X+a)/b}(\omega) = e^{ai\omega/b}\phi_X\left(\frac{\omega}{b}\right) \tag{40}$$

定理 3-12 若 X 和 Y 是分别具有特征函数 $\phi_X(\omega)$ 和 $\phi_Y(\omega)$ 的独立的随机变量,则

$$\phi_{X+Y}(\omega) = \phi_X(\omega)\phi_Y(\omega) \tag{41}$$

更一般地说,独立的随机变量的和的特征函数等于它们的特征函数的乘积.

定理 3-13(惟一性定理) 设 X 和 Y 是分别具有特征函数 $\phi_X(\omega)$ 和 $\phi_Y(\omega)$ 的随机变量.则当且仅当 $\phi_X(\omega)=\phi_Y(\omega)$ 恒等时,X 和 Y 有相同的概率分布.

引进特征函数的一个重要的理由是(37)式代表密度函数 $f(x)$ 的傅里叶(Fourier)变换.根据傅里叶变换的理论,我们能容易地从特征函数确定密度函数.事实上,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\phi_X(\omega)\,d\omega \tag{42}$$

常称它为反演公式,或反傅里叶变换.类似地,我们可以描述,在离散的情形下,利用傅里叶级数,根据(36)式得到的概率函数 $f(x)$,它是对离散情形傅里叶积分的类似式,见习题 3.39.

利用特征函数的另一个理由是它总是存在的,而矩母函数则可能不存在.

对联合分布的方差、协方差

以上对一个变量给出的结果可以推广到两个或更多个变量.例如,若 X 和 Y 是有联合密度函数 $f(x,y)$ 的两个连续的随机变量,则 X 和 Y 的均值或期望是

$$\begin{aligned}\mu_X &= E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)\,dx\,dy \\ \mu_Y &= E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)\,dx\,dy\end{aligned} \tag{43}$$

方差是

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^2 f(x,y)dxdy$$
$$\sigma_Y^2 = E[(Y-\mu_Y)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_Y)^2 f(x,y)dxdy \tag{44}$$

应注意到,X 和 Y 的边缘密度函数是不直接地包含在(43)和(44)式里.

另一个出现在两个变量 X 和 Y 情形的量是协方差,由下式定义:

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \tag{45}$$

用联合密度函数 $f(x,y)$,我们有

$$\sigma_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)dxdy \tag{46}$$

对两个离散的随机变量可以类似地陈述.在(43)和(46)式的情形,用下列式子代替:

$$\mu_X = \sum_x\sum_y xf(x,y), \qquad \mu_Y = \sum_x\sum_y yf(x,y) \tag{47}$$

$$\sigma_{XY} = \sum_x\sum_y(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y) \tag{48}$$

这里是对 X 和 Y 的全部离散的值求和.

以下是关于协方差的若干重要的定理:

定理 3-14

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y \tag{49}$$

定理 3-15 若 X 和 Y 是独立的随机变量,则

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X,Y) = 0 \tag{50}$$

定理 3-16

$$\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \pm 2\text{Cov}(X,Y) \tag{51}$$

或

$$\sigma_{X\pm Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \pm 2\sigma_{XY} \tag{52}$$

定理 3-17

$$|\sigma_{XY}| \leqslant \sigma_X\sigma_Y \tag{53}$$

相关系数

若 X 和 Y 是独立的,则 $\text{Cov}(X,Y)=\sigma_{XY}=0$.另一方面,若 X 和 Y 是完全相关的,例如,当 $X=Y$,则 $\text{Cov}(X,Y)=\sigma_{XY}=\sigma_X\sigma_Y$.据此我们引出变量 X 和 Y 相依赖的测度,由下式给出:

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{54}$$

我们称 ρ 为相关系数.根据定理 3-17,我们知道 $-1\leqslant\rho\leqslant1$.在 $\rho=0$ 的情形(即,协方差是 0),我们称变量 X 和 Y 是不相关的.然而在这些情形下,变量可以是独立的或不独立的.对相关性的进一步讨论将在第八章给出.

条件期望、方差和矩

若 X 和 Y 有联合密度函数 $f(x,y)$,则像我们在第二章已经见到的,给定 X 时 Y 的条件密度函数是 $f(y|x)=f(x,y)/f_1(x)$,这里 $f_1(x)$ 是 X 的边缘密度函数.我们可定义给定 X 时 Y 的条件期望,或条件均值如下:

$$E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy \tag{55}$$

在连续的情形,这里“$X=x$”看作 $x<X\leqslant x+dx$.定理 3-1 和定理 3-2 对条件期望也成立.

我们注意下列性质:

1. 当 X 和 Y 是独立时，$E(Y|X=x)=E(Y)$.

2. $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}E(Y|X=x)f_1(x)dx$.

利用性质 2 来计算期望常比直接计算方便.

例 3.5 到一座城市，乘小汽车的平均旅行时间是 c 小时、乘公共汽车是 b 小时. 一位妇女不能决定是乘小汽车去还是乘公共汽车去，于是她抛掷一枚硬币. 她期望的旅行时间是什么？

解 ☞ 这里我们涉及抛掷结果 X 和旅行时间 Y 的联合分布，当 $X=0$ 时 $Y=Y_{小汽车}$，而当 $X=1$ 时 $Y=Y_{公共汽车}$. 可以推测，$Y_{小汽车}$ 和 $Y_{公共汽车}$ 都和 X 独立，于是根据以上的性质 1

$$E(Y|X=0)=E(Y_{小汽车}|X=0)=E(Y_{小汽车})=c$$

和

$$E(Y|X=1)=E(Y_{公共汽车}|X=1)=E(Y_{公共汽车})=b$$

则对于一个匀称的硬币，由性质 2(用和代替积分)给出：

$$E(Y)=E(Y|X=0)P(X=0)+E(Y|X=1)P(X=1)=\frac{c+b}{2}$$

类似地，我们可定义给定 X 时 Y 的条件方差如下：

$$E[(Y-\mu_2)^2|X=x]=\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_2)^2f(y|x)dy \tag{56}$$

这里 $\mu_2=E(Y|X=x)$. 我们也可定义给定 X 时关于任何值 a 的 Y 的 r 阶条件矩如下：

$$E[(Y-a)^r|X=x]=\int_{-\infty}^{\infty}(y-a)^rf(y|x)dy \tag{57}$$

方差和矩的通常定理都可推广到条件方差和矩的情形.

切比雪夫(Chebyshev)不等式

在概率统计里有一个重要定理，它显示出离散的或连续的随机变量的一个一般性质，该随机变量有有限的均值和方差，这个重要定理称之为切比雪夫不等式.

定理 3-18 (切比雪夫不等式) 设 X 是有有限的均值 μ 和方差 σ^2 的随机变量(离散的或连续的). 则对于任一正数 ϵ，

$$P(|X-\mu|\geqslant\epsilon)\leqslant\frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \tag{58}$$

或对 $\epsilon=k\sigma$，

$$P(|X-\mu|\geqslant k\sigma)\leqslant\frac{1}{k^2} \tag{59}$$

例 3.6 在切比雪夫不等式(59)中，令 $k=2$，我们知道

$$P(|X-\mu|\geqslant 2\sigma)\leqslant 0.25 \quad 或 \quad P(|X-\mu|<2\sigma)\geqslant 0.75$$

对以上不等式我们甚至未指明 X 的概率分布，这一点是十分值得注意的.

大数定律

下列定理称为大数定律，它是切比雪夫不等式的一个有趣的推论.

定理 3-19 (大数定律) 令 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量(离散的或连续的)，每一个都有有限的均值 μ 和方差 σ^2. 若 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n \quad (n=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|\geqslant\epsilon\right)=0 \tag{60}$$

换句话说，只要 n 充分大，算术平均值 S_n/n 以很大的概率取值接近于期望 μ. 一个更强的结果 $\lim_{n\to\infty}S_n/n=\mu$，我们可以期望它是真实的，但是，实际上这是不正确的. 然而我们可以证明

$$P(\lim_{n\to\infty}S_n/n=\mu)=1$$

称这个结果为强大数定律，而称定理3-19的结果为弱大数定律. 当未限定为强大数定律时，

意思就是弱定律.

中心趋势的另外的测度

我们已经知道,随机变量 X 的均值或期望提供对分布的值的中心趋势的测度.尽管均值最有用,但是中心趋势的另外的两个测度也是有用的.它们就是众数和中位数.

1. 众数 最常发生的值称为离散随机变量的众数,或换句话说,该值有发生的最大概率.有时,我们有二三或更多值,它们相对地有发生的大的概率.在这样的情形中,我们分别称该分布是两峰的,三峰的或多峰的.连续的随机变量 X 的众数是 X 的一个值(或几个值),这个值处的概率密度函数有相对的最大值.

2. 中位数 满足 $P(X<x)\leqslant\frac{1}{2}$ 和 $P(X>x)\leqslant\frac{1}{2}$ 的 x 值是中位数.在连续分布的情形,我们有 $P(X<x)=\frac{1}{2}=P(X>x)$,且中位数将密度曲线分隔成两部分,每一部分都有相等的 $\frac{1}{2}$ 面积.在离散的分布情形,惟一的中位数可能不存在(见习题 3.34).

分位数

用平行于纵轴的纵线细分密度曲线下的面积,因此纵线左边的面积是总的单位面积的某些百分数.对应于这样的面积的值就称为分位数值,或简称分位数.例如,在图 3-2 中,过 x_α 纵线左边的面积是 α.例如,$x_{0.10}$ 的左边的面积是 0.10 或 10%,而 $x_{0.10}$ 就称为 0.10 分位数(也称为第 1 个十分位点).中位数是 0.50 分位数(或第五个十分位点).

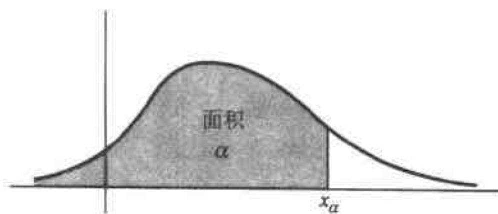


图 3-2

离差的另外的测度

正如除均值外尚有中心趋势的各种测度,除方差或标准差外尚有随机变量的离差或散布的各种测度.下列的几种是最普通的.

1. 半四分位数间距 若 $x_{0.25}$ 和 $x_{0.75}$ 代表 0.25 和 0.75 分位数值,差 $x_{0.75}-x_{0.25}$ 就称为四分位数间距,$\frac{1}{2}(x_{0.75}-x_{0.25})$ 是半四分位数间距.

2. 平均偏差 随机变量 X 的平均偏差(M.D.)定义为 $|X-\mu|$ 的期望,即在收敛的条件下,

$$\text{M.D.}(X)=E[|X-\mu|]=\sum|x-\mu|f(x) \quad \text{(离散的变量)} \tag{61}$$

$$\text{M.D.}(X)=E[|X-\mu|]=\int_{-\infty}^{\infty}|x-\mu|f(x)dx \quad \text{(连续的变量)} \tag{62}$$

偏度和峰度

1. 偏度 常常一个分布是其一个尾巴比另一个长,而不是关于某个值对称.若较长的尾巴发生在右边,如图 3-3 所示,则称该分布向右边偏斜,而若较长的尾巴发生在左边,如图 3-4 所示,则称它向左边偏斜.描绘这种不对称的一个测度称为偏度系数,或简称偏度.一个这种测度由下式给出:

$$\alpha_3=\frac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}=\frac{\mu_3}{\sigma^3} \tag{63}$$

该测度 α_3 是正的或是负的分别取决于分布是向右边或是向左边偏斜.对于一个对称的分布,$\alpha_3=0$.

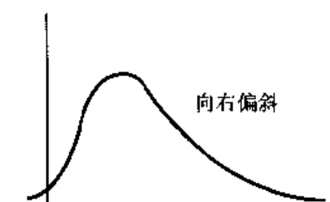


图 3-3

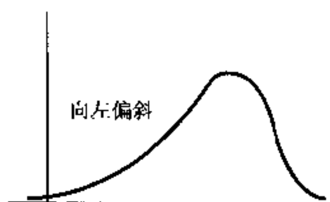


图 3-4

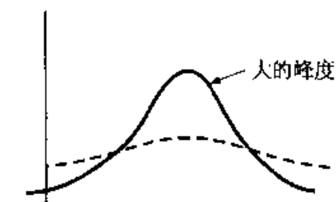


图 3-5

2. 峰度　在某些情形中,分布可能有集中靠近均值的值,因此该分布有一个大的尖峰,像图3-5中用实线显示的样子.在另外的情形中,分布可能是相对平坦的,像图 3-5 里用虚线显示的那样.分布的峰的程度的测度就称为峰度系数或简称峰度.常用的测度由下式给出:

$$\alpha_4 = \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \tag{64}$$

通常这与正态曲线作比较(见第四章),正态曲线的峰度的系数等于 3.也可见习题 3.41.

习 题 解 答

随机变量的期望

3.1　在抽彩给奖法中,有 5 美元的奖品 200 件,25 美元的奖品 20 件,100 美元的奖品 5 件.假设有 10 000 张彩票要发放和销售,1 张票付多少钱是合理的?

解 ☞ 令 X 是随机变量,它表示赢 1 张彩票获得的钱数.X 的各种值与它们的分布都描述在表3-2中.例如,获得 20 张彩票中的 1 张,给一件价值 25 美元的奖品的概率是 20/10 000 = 0.002.于是按美元计算,X 的期望是

$$E(X) = (5)(0.02) + (25)(0.002) + (100)(0.0005) + (0)(0.9775) = 0.2$$

或 20 美分.因此,1 张票付 20 美分是合理的价钱.然而,通常由于抽彩给奖的设计要提高票价,所以,每张票的价钱会更高些.

表 3-2

x(美元)	5	25	100	0
$P(X=x)$	0.02	0.002	0.0005	0.9775

3.2　求抛掷一对匀称的骰子,其点的和的期望.

解 ☞ 令 X 和 Y 表示两个骰子的点数.我们有

$$E(X) = E(Y) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + \cdots + 6\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{2}$$

则根据定理 3-2,

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 7$$

3.3　求离散的随机变量 X 的期望,X 的概率函数由下式给出:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad (x = 1,2,3,\cdots)$$

解 ☞ 我们有

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) + \cdots$$

令

$$S=\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{4}\right)+3\left(\frac{1}{8}\right)+4\left(\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

则

$$\frac{1}{2}S=\qquad\frac{1}{4}+2\left(\frac{1}{8}\right)+3\left(\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$$

因此，S=2.

3.4 连续的随机变量 X 有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

求(a)$E(X)$，(b)$E(X^2)$.

解 (a)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^{\infty}x(2e^{-2x})dx=2\int_0^{\infty}xe^{-2x}dx$$

$$=2\left[(x)\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)-(1)\left(\frac{e^{-2x}}{4}\right)\right]\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{2}$$

(b)

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=2\int_0^{\infty}x^2e^{-2x}dx$$

$$=2\left[(x^2)\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)-(2x)\left(\frac{e^{-2x}}{4}\right)+(2)\left(\frac{e^{-2x}}{-8}\right)\right]\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{2}$$

3.5 两个随机变量 X 和 Y 的联合密度函数由下式给出：

$$f(x,y)=\begin{cases}xy/96, & 0<x<4,1<y<5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 (a)$E(X)$， (b)$E(Y)$， (c)$E(XY)$， (d)$E(2X+3Y)$.

解 (a) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{x=0}^{4}\int_{y=1}^{5}x\left(\frac{xy}{96}\right)dxdy=\frac{8}{3}$

(b) $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy=\int_{x=0}^{4}\int_{y=1}^{5}y\left(\frac{xy}{96}\right)dxdy=\frac{31}{9}$

(c) $E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(xy)f(x,y)dxdy=\int_{x=0}^{4}\int_{y=1}^{5}(xy)\left(\frac{xy}{96}\right)dxdy=\frac{248}{27}$

(d) $E(2X+3Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(2x+3y)f(x,y)dxdy=\int_{x=0}^{4}\int_{y=1}^{5}(2x+3y)\left(\frac{xy}{96}\right)dxdy=\frac{47}{3}$

另解 (c)由于 X 和 Y 是独立的，利用(a)和(b)的结果，我们有

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{8}{3}\times\frac{31}{9}=\frac{248}{27}$$

(d)根据定理 3-1 和定理 3-2，并利用(a)和(b)的结果，

$$E(2X+3Y)=2E(X)+3E(Y)=2\times\frac{8}{3}+3\times\frac{31}{9}=\frac{47}{3}$$

3.6 证明定理 3-2.

证明 令 $f(x,y)$ 是 X 和 Y 的联合概率函数，假设 X 和 Y 是离散的.则

$$E(X+Y)=\sum_x\sum_y(x+y)f(x,y)$$

$$=\sum_x\sum_y xf(x,y)+\sum_x\sum_y yf(x,y)$$

$$=E(X)+E(Y)$$

若任一个变量是连续的，则通过前面的方法来证明，用积分代替求和即可.要注意，不论 X 和 Y 是否是独立的，该定理都是成立的.

3.7 证明定理 3-3.

证明 ☞ 令 $f(x,y)$ 是 X 和 Y 的联合概率函数,假设 X 和 Y 是离散的.若 X 和 Y 是独立的变量,我们有 $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$.因此,

$$\begin{aligned}E(XY) &= \sum_x\sum_y xyf(x,y) = \sum_x\sum_y xyf_1(x)f_2(y)\\ &= \sum_x\Big[xf_1(x)\sum_y yf_2(y)\Big]\\ &= \sum_x[xf_1(x)E(y)] = E(X)E(Y)\end{aligned}$$

若任一个变量是连续的,则证明如前,用积分代替求和.要注意该定理有效的关键在于 $f(x,y)$ 能对所有的 x 和 y 表成 x 的函数与 y 的函数的乘积,即 X 和 Y 是否是独立的.一般来说,对于不独立的变量,该定理是不真实的.

方差和标准差

3.8 抛掷一对匀称的骰子得到点数的和,求(a)方差,(b)标准差.

解 ☞ (a)由习题 3.2,我们有 $E(X)=E(Y)=7/2$.而且

$$E(X^2) = E(Y^2) = 1^2\left(\frac{1}{6}\right) + 2^2\left(\frac{1}{6}\right) + \cdots + 6^2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{91}{6}$$

则根据定理 3-4,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

由于 X 和 Y 是独立的,根据定理 3-7,

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \frac{35}{6}$$

(b)
$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\mathrm{Var}(X+Y)} = \sqrt{\frac{35}{6}}$$

3.9 对习题 3.4 中的随机变量,求(a)方差,(b)标准差.

解 ☞ (a)在习题 3.4 中,X 的均值是 $\mu=E(X)=\frac{1}{2}$.则方差是

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E[(X-\mu)^2] = E\left[\left(X-\frac{1}{2}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 f(x)dx\\ &= \int_0^{\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(2e^{-2x})dx = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

另解 根据定理 3-4,

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

(b)
$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

3.10 证明定理 3-4.

证明 ☞ 我们有

$$\begin{aligned}E[(X-\mu)^2] &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2\\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2\\ &= E(X^2) - [E(X)]^2\end{aligned}$$

3.11 证明定理 3-6.

证明 ☞
$$\begin{aligned}E[(X-a)^2] &= E[\{(X-\mu)+(\mu-a)\}^2]\\ &= E[(X-\mu)^2 + 2(X-\mu)(\mu-a) + (\mu-a)^2]\\ &= E[(X-\mu)^2] + 2(\mu-a)E(X-\mu) + (\mu-a)^2\\ &= E[(X-\mu)^2] + (\mu-a)^2\end{aligned}$$

由于 $E(X-\mu)=E(X)-\mu=0$.由此我们看到,当 $(\mu-a)^2=0$,即,当 $\mu=a$ 时,$E[(X-a)^2]$ 的最小值出现.

3.12 若 $X^*=(X-\mu)/\sigma$ 是标准随机变量,证明(a)$E(X^*)=0$,(b)$\mathrm{Var}(X^*)=1$.

证明 ☞ (a)由于 $E(X)=\mu$, 则

$$E(X^*)=E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}[E(X-\mu)]=\frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu]=0$$

(b)
$$\mathrm{Var}(X^*)=\mathrm{Var}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}E[(X-\mu)^2]=1$$

3.13 证明定理 3-7.

证明 ☞

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X+Y)&=E[\{(X+Y)-(\mu_X+\mu_Y)\}^2]\\&=E[\{(X-\mu_X)+(Y-\mu_Y)\}^2]\\&=E[(X-\mu_X)^2+2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)+(Y-\mu_Y)^2]\\&=E[(X-\mu_X)^2]+2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]+E[(Y-\mu_Y)^2]\\&=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)\end{aligned}$$

其中利用以下事实:

$$E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=E(X-\mu_X)E(Y-\mu_Y)=0$$

由于 X 和 Y 是独立的,从而 $X-\mu_X$ 和 $Y-\mu_Y$ 是独立的.对(19)式的证明,在(18)式用 $-Y$ 代替 Y 并利用定理 3-5 即可得证.

矩和矩母函数

3.14 证明正文(26)式.

证明 ☞

$$\begin{aligned}\mu_r&=E[(X-\mu)^r]\\&=E\left[X^r-\binom{r}{1}X^{r-1}\mu+\cdots+(-1)^j\binom{r}{j}X^{r-j}\mu^j\right.\\&\qquad\left.+\cdots+(-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}X\mu^{r-1}+(-1)^r\mu^r\right]\\&=E(X^r)-\binom{r}{1}E(X^{r-1})\mu+\cdots+(-1)^j\binom{r}{j}E(X^{r-j})\mu^j\\&\qquad+\cdots+(-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}E(X)\mu^{r-1}+(-1)^r\mu^r\\&=\mu_r'-\binom{r}{1}\mu_{r-1}'\mu+\cdots+(-1)^j\binom{r}{j}\mu_{r-j}'\mu^j\\&\qquad+\cdots+(-1)^{r-1}r\mu^r+(-1)^{-r}\mu^r\end{aligned}$$

这里最后两项可合并成$(-1)^{r-1}(r-1)\mu^r$.

3.15 证明(a)正文(31)式,(b)正文(32)式.

证明 ☞ (a)利用 e^x 的幂级数展式(3,附录 A),我们有

$$\begin{aligned}M_X(t)=E(e^{tX})&=E\left(1+tX+\frac{t^2X^2}{2!}+\frac{t^3X^3}{3!}+\cdots\right)\\&=1+tE(X)+\frac{t^2}{2!}E(X^2)+\frac{t^3}{3!}E(X^3)+\cdots\\&=1+\mu t+\mu_2'\frac{t^2}{2!}+\mu_3'\frac{t^3}{3!}+\cdots\end{aligned}$$

(b)根据微积分中的已知结果,$f(t)$在 $t=a$ 处的泰勒级数是

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t-a)^n$$

则

$$c_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}f(t)\bigg|_{t=a}$$

3.16 证明定理 3-9.

证明 ☞ 由于 X 和 Y 是独立的,X 的任一函数和 Y 的任一函数是独立的.因此

$$M_{X+Y}(t)=E[e^{t(X+Y)}]=E(e^{tX}e^{tY})=E(e^{tX})E(e^{tY})=M_X(t)M_Y(t)$$

3.17 假设随机变量 X 取概率分别为$\frac{1}{2}$的两个值 1 和 −1. 求(a)矩母函数,(b)关于原点的前 4 个矩.

解 ☞ (a)
$$E(e^{tX})=e^{t(1)}\left(\frac{1}{2}\right)+e^{t(-1)}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$$

(b)我们有

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots$$

$$e^{-t}=1-t+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots$$

则

$$(1)\qquad \frac{1}{2}(e^t+e^{-t})=1+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots$$

而

$$(2)\qquad M_X(t)=1+\mu t+\mu_2'\frac{t^2}{2!}+\mu_3'\frac{t^3}{3!}+\mu_4'\frac{t^4}{4!}+\cdots$$

比较(1)和(2),我们有

$$\mu=0,\quad \mu_2'=1,\quad \mu_3'=0,\quad \mu_4'=1,\cdots$$

奇数阶矩全是 0,而偶数阶矩全是 1.

3.18 随机变量 X 的密度函数由下式给出:

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

求(a)矩母函数,(b)关于原点的头 4 个矩.

解 ☞ (a)

$$M(t)=E(e^{tX})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f(x)dx$$
$$=\int_0^{\infty}e^{tx}(2e^{-2x})dx=2\int_0^{\infty}e^{(t-2)x}dx$$
$$=\frac{2e^{(t-2)x}}{t-2}\bigg|_0^{\infty}=\frac{2}{2-t},\qquad \text{假设 } t<2$$

(b)若 $|t|<2$,我们有

$$\frac{2}{2-t}=\frac{1}{1-t/2}=1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+\frac{t^3}{8}+\frac{t^4}{16}+\cdots$$

而

$$M(t)=1+\mu t+\mu_2'\frac{t^2}{2!}+\mu_3'\frac{t^3}{3!}+\mu_4'\frac{t^4}{4!}+\cdots$$

因此,比较各项得,$\mu=\frac{1}{2},\mu_2'=\frac{1}{2},\mu_3'=\frac{3}{4},\mu_4'=\frac{3}{2}$.

3.19 对有以下密度函数的随机变量 X,

$$f(x)=\begin{cases}4x(9-x^2)/81, & 0\leqslant x\leqslant 3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求前 4 个矩,(a)关于原点,(b)关于均值.

解 ☞ (a)

$$\mu_1'=E(X)=\frac{4}{81}\int_0^3 x^2(9-x^2)dx=\frac{8}{5}=\mu$$

$$\mu_2'=E(X^2)=\frac{4}{81}\int_0^3 x^3(9-x^2)dx=3$$

$$\mu_3'=E(X^3)=\frac{4}{81}\int_0^3 x^4(9-x^2)dx=\frac{216}{35}$$

$$\mu_4'=E(X^4)=\frac{4}{81}\int_0^3 x^5(9-x^2)dx=\frac{27}{2}$$

(b)利用结果(27),我们有

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = 3 - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{11}{25} = \sigma^2$$

$$\mu_3 = \frac{216}{35} - 3(3)\left(\frac{8}{5}\right) + 2\left(\frac{8}{5}\right)^3 = -\frac{32}{875}$$

$$\mu_4 = \frac{27}{2} - 4\left(\frac{216}{35}\right)\left(\frac{8}{5}\right) - 6(3)\left(\frac{8}{5}\right)^2 - 3\left(\frac{8}{5}\right)^4 = \frac{3693}{8750}$$

特征函数

3.20　求习题 3.17 中的随机变量 X 的特征函数.

解　特征函数由下式给出:

$$E(e^{i\omega X}) = e^{i\omega(1)}\left(\frac{1}{2}\right) + e^{i\omega(-1)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) = \cos\omega$$

利用欧拉(Euler)公式,令 $\theta = \omega$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

该结果也能从习题 3.17(a)得到,只要让 $t = i\omega$.

3.21　求随机变量 X 的特征函数,X 的密度函数由下式给出:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2a, & |x| < a \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

解　在 $\theta = a\omega$,利用欧拉公式(见习题 3.20),特征函数由下式给出:

$$E(e^{i\omega X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{i\omega x}dx$$

$$= \frac{1}{2a}\frac{e^{i\omega x}}{i\omega}\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{e^{ia\omega} - e^{-ia\omega}}{2ia\omega} = \frac{\sin a\omega}{a\omega}$$

3.22　求随机变量 X 的特征函数,X 有密度函数 $f(x) = ce^{-a|x|}$, $-\infty < x < \infty$,这里 $a > 0$, c 是常数.

解　由于 $f(x)$是一个密度函数,我们必有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

从而

$$c\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}dx = c\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-a(-x)}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-a(x)}dx\right]$$

$$= c\,\frac{e^{ax}}{a}\Bigg|_{-\infty}^{0} + c\,\frac{e^{-ax}}{-a}\Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{2c}{a} = 1$$

则 $c = a/2$.因此特征函数由下式给出:

$$E(e^{i\omega X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx$$

$$= \frac{a}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{i\omega x}e^{-a(-x)}dx + \int_{0}^{\infty} e^{i\omega x}e^{-a(x)}dx\right]$$

$$= \frac{a}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(a+i\omega)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(a-i\omega)x}dx\right]$$

$$= \frac{a}{2}\,\frac{e^{(a+i\omega)x}}{a+i\omega}\Bigg|_{-\infty}^{0} + a\,\frac{e^{-(a-i\omega)x}}{-(a-i\omega)}\Bigg|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{a}{2(a+i\omega)} + \frac{a}{2(a-i\omega)} = \frac{a^2}{a^2+\omega^2}$$

协方差和相关系数

3.23 证明定理 3-14.

证明 ☞ 根据 X 和 Y 的协方差的定义,

$$\begin{aligned}\sigma_{XY} &= \mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]\\ &= E[XY-\mu_X Y-\mu_Y X+\mu_X\mu_Y]\\ &= E(XY)-\mu_X E(Y)-\mu_Y E(X)+E(\mu_X\mu_Y)\\ &= E(XY)-\mu_X\mu_Y-\mu_Y\mu_X+\mu_X\mu_Y\\ &= E(XY)-\mu_X\mu_Y\\ &= E(XY)-E(X)E(Y)\end{aligned}$$

3.24 证明定理 3-15.

证明 ☞ 若 X 和 Y 是独立的,则 $E(XY)=E(X)E(Y)$.因此,由习题 3.23,

$$\sigma_{XY}=\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

3.25 对习题 2.8 中所定义的随机变量 X 和 Y,求(a)$E(X)$,(b)$E(Y)$,(c)$E(XY)$,(d)$E(X^2)$,(e)$E(Y^2)$,(f)$\mathrm{Var}(X)$,(g)$\mathrm{Var}(Y)$,(h)$\mathrm{Cov}(X, Y)$,(i)ρ.

解 ☞ (a)

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_x\sum_y x f(x, y) = \sum_x x\Big[\sum_y f(x, y)\Big]\\ &= (0)(6c)+(1)(14c)+(2)(22c) = 58c = \frac{58}{42} = \frac{29}{21}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_x\sum_y y f(x, y) = \sum_y y\Big[\sum_x f(x, y)\Big]\\ &= (0)(6c)+(1)(9c)+(2)(12c)+(3)(15c) = 78c = \frac{78}{42} = \frac{13}{7}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}E(XY) &= \sum_x\sum_y xy f(x, y)\\ &= (0)(0)(0)+(0)(1)(c)+(0)(2)(2c)+(0)(3)(3c)\\ &\quad+(1)(0)(2c)+(1)(1)(3c)+(1)(2)(4c)+(1)(3)(5c)\\ &\quad+(2)(0)(4c)+(2)(1)(5c)+(2)(2)(6c)+(2)(3)(7c)\\ &= 102c = \frac{102}{42} = \frac{17}{7}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \sum_x\sum_y x^2 f(x, y) = \sum_x x^2\Big[\sum_y f(x, y)\Big]\\ &= (0)^2(6c)+(1)^2(14c)+(2)^2(22c) = 102c = \frac{102}{42} = \frac{17}{7}\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= \sum_x\sum_y y^2 f(x, y) = \sum_y y^2\Big[\sum_x f(x, y)\Big]\\ &= (0)^2(6c)+(1)^2(9c)+(2)^2(12c)+(3)^2(15c) = 192c = \frac{192}{42} = \frac{32}{7}\end{aligned}$$

(f)
$$\sigma_X^2=\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{17}{7}-\left(\frac{29}{21}\right)^2=\frac{230}{441}$$

(g)
$$\sigma_Y^2=\mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{32}{7}-\left(\frac{13}{7}\right)^2=\frac{55}{49}$$

(h)
$$\sigma_{XY}=\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{17}{7}-\left(\frac{29}{21}\right)\left(\frac{13}{7}\right)=-\frac{20}{147}$$

(i)
$$\rho=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{-20/147}{\sqrt{230/441}\sqrt{55/49}}=\frac{-20}{\sqrt{230}\sqrt{55}}=-0.2103\text{(近似的)}$$

3.26 若像习题 2.33 中那样来定义随机变量 X 和 Y,做习题 3.25.

解 利用 $c=1/210$,我们有

(a) $$E(X)=\frac{1}{210}\int_{x=2}^{6}\int_{y=0}^{5}(x)(2x+y)dxdy=\frac{268}{63}$$

(b) $$E(Y)=\frac{1}{210}\int_{x=2}^{6}\int_{y=0}^{5}(y)(2x+y)dxdy=\frac{170}{63}$$

(c) $$E(XY)=\frac{1}{210}\int_{x=2}^{6}\int_{y=0}^{5}(xy)(2x+y)dxdy=\frac{80}{7}$$

(d) $$E(X^2)=\frac{1}{210}\int_{x=2}^{6}\int_{y=0}^{5}(x^2)(2x+y)dxdy=\frac{1\,220}{63}$$

(e) $$E(Y^2)=\frac{1}{210}\int_{x=2}^{6}\int_{y=0}^{5}(y^2)(2x+y)dxdy=\frac{1\,175}{126}$$

(f) $$\sigma_X^2=\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1\,220}{63}-\left(\frac{268}{63}\right)^2=\frac{5\,036}{3969}$$

(g) $$\sigma_Y^2=\mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1\,175}{126}-\left(\frac{170}{63}\right)^2=\frac{16\,225}{7\,938}$$

(h) $$\sigma_{XY}=\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{80}{7}-\frac{268}{63}\times\frac{170}{63}=-\frac{200}{3\,969}$$

(i) $$\rho=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{-200/3969}{\sqrt{5\,036/3\,969}\times\sqrt{16\,225/7\,938}}=\frac{-200}{\sqrt{2\,518}\times\sqrt{16\,225}}=-0.03129(\text{近似的})$$

条件期望,方差和矩

3.27 求习题 2.8 中给定 $X=2$ 时 Y 的条件期望.

解 像习题 2.27 中的那样,给定 $X=2$ 时 Y 的条件概率函数是

$$f(y\mid 2)=\frac{4+y}{22}$$

则给定 $X=2$ 时 Y 的条件期望是

$$E(Y\mid X=2)=\sum_y y\left(\frac{4+y}{22}\right)$$

这里是对应于 $X=2$ 对所有的 Y 求和.这由下式给出:

$$E(Y|X=2)=(0)\left(\frac{4}{22}\right)+1\left(\frac{5}{22}\right)+2\left(\frac{6}{22}\right)+3\left(\frac{7}{22}\right)=\frac{19}{11}$$

3.28 求习题 2.29 中,(a)给定 X 时 Y 的条件期望,(b)给定 Y 时 X 的条件期望.

解 (a) $$E(Y\mid X=x)=\int_{-\infty}^{\infty}yf_2(y\mid x)dy=\int_0^x y\left(\frac{2y}{x^2}\right)dy=\frac{2x}{3}$$

(b) $$E(X\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x\mid y)dx=\int_y^1 x\left(\frac{2x}{1-y^2}\right)dx$$
$$=\frac{2(1-y^3)}{3(1-y^2)}=\frac{2(1+y+y^2)}{3(1+y)}$$

3.29 求习题 2.29 中,给定 X 时 Y 的条件方差.

解 所求的方差由下式给出:

$$E[(Y-\mu_2)^2\mid X=x]=\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_2)^2f_2(y\mid x)dy=\int_0^x\left(y-\frac{2x}{3}\right)^2\left(\frac{2y}{x^2}\right)dy=\frac{x^2}{18}$$

这里,我们利用了习题 3.28(a)的结果,

$$\mu_2=E(Y|X=x)=2x/3$$

切比雪夫不等式

3.30 证明切比雪夫不等式.

证明 我们将对连续的随机变量给出证明.对离散的变量的证明是类似的,只要用和代替积分.若 $f(x)$是 X 的密度函数,则

$$\sigma^2=E[(X-\mu)^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)dx$$

由于被积函数是非负的，所以当积分的范围缩小时，该积分的值只可能下降．因此，

$$\sigma^2 \geqslant \int_{|x-\mu|\geqslant\varepsilon}(x-\mu)^2 f(x)dx \geqslant \int_{|x-\mu|\geqslant\varepsilon}\varepsilon^2 f(x)dx = \varepsilon^2\int_{|x-\mu|\geqslant\varepsilon}f(x)dx$$

而最后的积分等于 $P(|X-\mu|\geqslant\varepsilon)$．因此，

$$P(|X-\mu|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

3.31　对习题 3.18 中的随机变量，(a)求 $P(|X-\mu|>1)$，(b)利用切比雪夫不等式求 $P(|X-\mu|>1)$的上界并与(a)的结果作比较．

解 ☞ (a)根据习题 3.18，$\mu=1/2$．则

$$P(|X-\mu|<1)=P\left(\left|X-\frac{1}{2}\right|<1\right)=P\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)$$

$$=\int_0^{3/2}2e^{-2x}dx = 1-e^{-3}$$

因此

$$P\left(\left|X-\frac{1}{2}\right|\geqslant 1\right)=1-(1-e^{-3})=e^{-3}=0.04979$$

(b)根据习题 3.18，$\sigma^2=\mu_2'-\mu^2=1/4$．则具有 $\varepsilon=1$ 的切比雪夫不等式给出：

$$P(|X-\mu|\geqslant 1)\leqslant\sigma^2=0.25$$

与(a)的结果作比较，我们看到，这里由切比雪夫不等式提供的界是十分粗糙的．事实上，当要得到精确值不方便或不可能时，可用切比雪夫不等式提供估计．

大数定律

3.32　证明在定理 3-19 中陈述的大数定律．

证明 ☞ 我们有

$$E(X_1)=E(X_2)=\cdots=E(X_n)=\mu$$

$$\mathrm{Var}(X_1)=\mathrm{Var}(X_2)=\cdots=\mathrm{Var}(X_n)=\sigma^2$$

则

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right)=E\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n}[E(X_1)+\cdots+E(X_n)]=\frac{1}{n}(n\mu)=\mu$$

$$\mathrm{Var}(S_n)=\mathrm{Var}(X_1+\cdots+X_n)=\mathrm{Var}(X_1)+\cdots+\mathrm{Var}(X_n)=n\sigma^2$$

从而

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(S_n)=\frac{\sigma^2}{n}$$

这里我们用了定理 3-5 和定理 3-7 的扩展，因此，根据具有 $X=S_n/n$ 的切比雪夫不等式，我们有

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

当 $n\to\infty$ 时取极限，这就变成所要求的

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|\geqslant\varepsilon\right)=0$$

中心趋势的另外的测度

3.33　连续的随机变量 X 的密度函数是

$$f(x)=\begin{cases}4x(9-x^2)/81, & 0\leqslant x\leqslant 3\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(a)求众数，(b)求中位数，(c)比较众数、中位数和均值．

解 ☞ (a)该众数是通过求具有相对最大值的密度函数 $f(x)$得到的．该 $f(x)$的相对最大值产生于 $f(x)$的导数是 0 处，即

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{4x(9-x^2)}{81}\right]=\frac{36-12x^2}{81}=0$$

则 $x=\sqrt{3}=1.73$，它是近似值，这就是要求的众数．注意这是由于在 $x=\sqrt{3}$ 处的二阶导数 $-24x/81$ 是负的，所以在 $x=\sqrt{3}$ 处给出 $f(x)$ 的最大值．

(b)中位数是对 $P(X\leqslant a)=1/2$ 的值 9．现在，对 $0<a<3$，

$$P(X\leqslant a)=\frac{4}{81}\int_0^a x(9-x^2)dx=\frac{4}{81}\left(\frac{9a^2}{2}-\frac{a^4}{4}\right)$$

让它等于 1/2，我们求得

$$2a^4-36a^2+81=0$$

根据

$$a^2=\frac{36\pm\sqrt{(36)^2-4(2)(81)}}{2(2)}=\frac{36\pm\sqrt{648}}{4}=9\pm\frac{9}{2}\sqrt{2}$$

因此，所求的中位数必在 0 与 3 之间，由下式给出：

$$a^2=9-\frac{9}{2}\sqrt{2}$$

于是 $a=1.62$，这是近似值．

(c)
$$E(X)=\frac{4}{81}\int_0^3 x^2(9-x^2)dx=\frac{4}{81}\left(3x^3-\frac{x^5}{5}\right)\bigg|_0^3=1.60$$

实际上它就等于中位数．众数、中位数和均值在图 3-6 中显示．

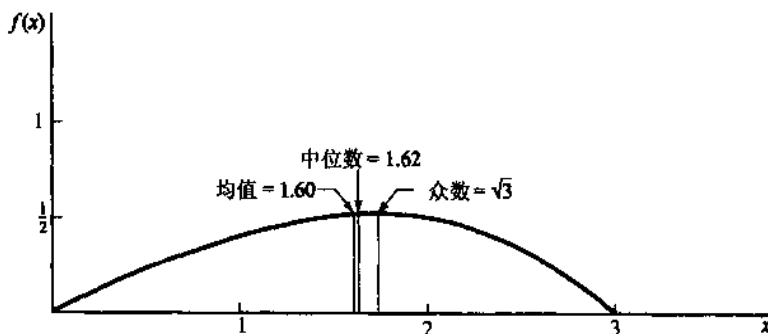


图 3-6

3.34 离散随机变量有概率函数 $f(x)=1/2^x$，这里 $x=1,2,\cdots$．求(a)众数，(b)中位数，(c)把它们与均值作比较．

解答 (a)众数是有最大的连带概率的值 x．在 $x=1$ 的情形，相对它的概率是 1/2．

(b)若 x 是 1 与 2 之间的任一值，$P(X<x)=\frac{1}{2}$ 且 $P(X>x)=\frac{1}{2}$．因此，1 与 2 之间的任一数能表示中位数．为方便起见，我们选择该区间的中点，即 3/2．

(c)像在习题 3.3 求出的那样，$\mu=2$．因此，3 个测度的顺序正好与习题 3.33 中的相反．

分位数

3.35 确定对习题 3.33 的分布的(a)0.10 分位数值，(b)0.25 分位数值，(c)0.75 分位数值．

解答 根据习题 3.33(b)，我们有

$$P(X\leqslant a)=\frac{4}{81}\left(\frac{9a^2}{2}-\frac{a^4}{4}\right)=\frac{18a^2-a^4}{81}$$

(a)0.10 分位数是对于 $P(X\leqslant a)=0.10$ 的值 a，即 $(18a^2-a^4)/81=0.10$ 的解．用习题 3.33 的方法，我们求得近似值 $a=0.68$．

(b)0.25 分位数是满足 $(18a^2-a^4)/81=0.25$ 的值 a，从而我们求得近似的 $a=1.098$．

(c)0.75 分位数满足 $(18a^2-a^4)/81=0.75$ 的值 a，从而我们求得近似的 $a=2.121$．

离差的另外的测度

3.36 对习题 3.33 中的分布，确定，(a)半四分位数间距，(b)平均偏差．

解 ☞ (a)根据习题 3.35,0.25 和 0.75 分位数值分别是 1.098 和 2.121.因此,

$$半四分位数间距 = \frac{2.121 - 1.098}{2} = 0.51(近似的)$$

(b)根据习题 3.33,均值是 $\mu = 1.60 = 8/5$,则

$$\begin{aligned}
平均偏差 = \text{M.D.} &= E(|X-\mu|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu| f(x)dx \\
&= \int_0^3 \left| x - \frac{8}{5} \right| \left[\frac{4x}{81}(9-x^2) \right] dx \\
&= \int_0^{8/5} \left(\frac{8}{5} - x \right) \left[\frac{4x}{81}(9-x^2) \right] dx + \int_{8/5}^{3} \left(x - \frac{8}{5} \right) \left[\frac{4x}{81}(9-x^2) \right] dx \\
&= 0.555(近似的)
\end{aligned}$$

偏度和峰度

3.37 求对习题 3.19 的分布的(a)偏度系数,(b)峰度系数.

解 ☞ 根据习题 3.19(b),我们有

$$\sigma^2 = \frac{11}{25}, \qquad \mu_3 = -\frac{32}{875}, \qquad \mu_4 = \frac{3\,693}{8\,750}$$

(a)偏度系数 $= \alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = -0.1253$

(b)峰度系数 $= \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = 2.172$

从而它存在着向左边缓和的偏斜,像在图 3-6 里所描述的样子.这也说明分布的峰比正态分布的峰稍微小点,正态分布的峰度为 3.

综合问题

3.38 若 $M(t)$是随机变量 X 的矩母函数,证明均值是 $\mu = M'(0)$而方差是 $\sigma^2 = M''(0) - [M'(0)]^2$.

解 ☞ 根据(32)式,令 $r=1$ 和 $r=2$,我们有

$$\mu_1' = M'(0), \qquad \mu_2' = M''(0)$$

根据(27)式,

$$\mu = M'(0), \qquad \mu_2 = \sigma^2 = M''(0) - [M'(0)]^2$$

3.39 令 X 是随机变量,它取值 $x_k = k$ 具有概率 p_k,这里 $k = \pm 1, \cdots, \pm n$.(a)求 X 的特征函数$\phi(\omega)$,(b)在 $\phi(\omega)$的项里得到 p_k.

解 ☞ (a)特征函数是

$$\phi(\omega) = E(e^{i\omega X}) = \sum_{k=-n}^{n} e^{i\omega x_k} p_k = \sum_{k=-n}^{n} p_k e^{ik\omega}$$

(b)在(a)中用 $e^{-ij\omega}$乘表示式的两边且对ω 从 0 积到 2π,则

$$\int_{\omega=0}^{2\pi} e^{-ij\omega} \phi(\omega) d\omega = \sum_{k=-n}^{n} p_k \int_{\omega=0}^{2\pi} e^{i(k-j)\omega} d\omega = 2\pi p_j$$

由于

$$\int_{\omega=0}^{2\pi} e^{i(k-j)\omega} d\omega = \begin{cases} \left. \dfrac{e^{i(k-j)\omega}}{i(k-j)} \right|_0^{2\pi} = 0, & k \neq j \\ 2\pi, & k = j \end{cases}$$

因此

$$p_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=0}^{2\pi} e^{-ij\omega} \phi(\omega) d\omega$$

或用 k 代替 j,

$$p_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=0}^{2\pi} e^{-ik\omega} \phi(\omega) d\omega$$

我们常称 $\sum_{k=-n}^{n} p_k e^{ik\omega}$（这里的 n，理论上可以是无限的）为 $\phi(\omega)$ 的傅里叶级数，p_k 是傅里叶系数．对于连续的随机变量，则用傅里叶积分代替傅里叶级数．

3.40 利用习题 3.39 去求得随机变量 X 的概率分布，而 X 的特征函数是 $\phi(\omega)=\cos\omega$．

解 ☞ 根据习题 3.39

$$
\begin{aligned}
p_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=0}^{2\pi} e^{-ik\omega}\cos\omega d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=0}^{2\pi} e^{-ik\omega}\left[\frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2}\right]d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\omega=0}^{2\pi} e^{i(1-k)\omega}d\omega + \frac{1}{4\pi}\int_{\omega=0}^{2\pi} e^{-i(1+k)\omega}d\omega
\end{aligned}
$$

若 $k=1$，我们求得 $p_1=\frac{1}{2}$；若 $k=-1$，我们求得 $p_{-1}=\frac{1}{2}$．对 k 的所有的其他值，我们有 $p_k=0$．因此，随机变量由下式给出：

$$
X=\begin{cases} 1, & \text{概率}\frac{1}{2} \\ -1, & \text{概率}\frac{1}{2} \end{cases}
$$

作为检验，见习题 3.20．

3.41 求由密度为

$$
f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \qquad -\infty < x < \infty
$$

的正态曲线所确定的分布的(a)偏度系数，(b)峰度系数．

解 ☞ (a)分布的图形为图 3-7．根据对称性，$\mu_1'=\mu=0$ 且 $\mu_3'=0$．因此，偏度系数是 0．

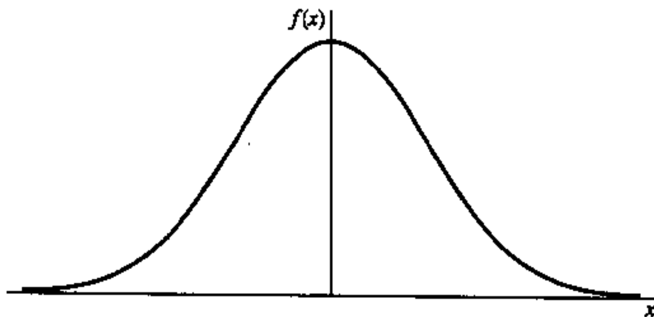


图 3-7

(b)我们有

$$
\begin{aligned}
\mu_2' = E(X^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} v^{1/2}e^{-v}dv \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1
\end{aligned}
$$

这里我们已经做了变换 $x^2/2=v$ 且用了伽马函数的性质，这些性质由附录 A 的(2)和(5)给出．类似地，我们得到

$$
\begin{aligned}
\mu_4' = E(X^4) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2/2}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2/2}dx \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} v^{3/2}e^{-v}dv \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 3
\end{aligned}
$$

现在

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) = \mu_2' = 1$$

$$\mu_4 = E[(X-\mu)^4] = E(X^4) = \mu_4' = 3$$

于是峰度系数是

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$$

3.42　证明 $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$(见(54)式).

证明　对于任一实常数 c,我们有

$$E[\{Y-\mu_Y-c(X-\mu)\}^2] \geqslant 0$$

现在左边可以写成

$$\begin{aligned} E[(Y-\mu_Y)^2] + c^2E[(X-\mu_X)^2] - 2cE[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\ = \sigma_Y^2 + c^2\sigma_X^2 - 2c\sigma_{XY} \\ = \sigma_Y^2 + \sigma_X^2\left(c^2 - \frac{2c\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}\right) \\ = \sigma_Y^2 + \sigma_X^2\left(c - \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}\right)^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2} \\ = \frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2} + \sigma_X^2\left(c - \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}\right)^2 \end{aligned}$$

为了使上式最后的量对每一个 c 的值是大于或等于 0,我们必有

$$\sigma_X^2\sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2 \geqslant 0 \quad 或 \quad \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} \leqslant 1$$

它等价于 $\rho^2 \leqslant 1$ 或 $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$.

补 充 习 题

随机变量的期望

3.43　随机变量 X 由下式确定:

$$X = \begin{cases} -2, & 概率 1/3 \\ 3, & 概率 1/2 \\ 1, & 概率 1/6 \end{cases}$$

求(a)$E(X)$,(b)$E(2X+5)$,(c)$E(X^2)$.

3.44　令 X 是随机变量,它的密度函数是

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

求(a)$E(X)$,(b)$E(3X-2)$,(c)$E(X^2)$.

3.45　随机变量 X 的密度函数是

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

求(a)$E(X)$,(b)$E(X^2)$,(c)$E[(X-1)^2]$.

3.46　将一个匀称的骰子连续抛掷 3 次,向上的点的期望数是什么?你的答案合理吗?并作解释.

3.47　随机变量 X 有密度函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

求 $E(e^{2x/3})$.

3.48　令 X 和 Y 是独立的随机变量,它们都有密度函数

$$f(u) = \begin{cases} 2e^{-2u}, & u \geqslant 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

求(a)$E(X+Y)$,(b)$E(X^2+Y^2)$,(c)$E(XY)$.

3.49　在习题 3.48 中,(a)$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$,(b)$E(XY)=E(X)E(Y)$都成立吗?作解释.

3.50　令 X 和 Y 是随机变量，它们有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{5}x(x+y), & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(a)$E(X)$，(b)$E(Y)$，(c)$E(X+Y)$，(d)$E(XY)$.

3.51　在习题 3.50 中，(a)$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$，(b)$E(XY)=E(X)E(Y)$，都成立吗？并作解释.

3.52　令 X 和 Y 是随机变量，它们有联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(a)$E(X)$，(b)$E(Y)$，(c)$E(X+Y)$，(d)$E(XY)$.

3.53　在习题 3.52 中，(a)$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$，(b)$E(XY)=E(X)E(Y)$，都成立吗？作解释.

3.54　令

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(2x+y), & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

求(a)$E(X)$，(b)$E(Y)$，(c)$E(X^2)$，(d)$E(Y^2)$，(e)$E(X+Y)$，(f)$E(XY)$.

3.55　令 X 和 Y 是独立的随机变量，

$$X=\begin{cases}1, & \text{概率 } 1/3\\ 0, & \text{概率 } 2/3\end{cases},\quad Y=\begin{cases}2, & \text{概率 } 3/4\\ -3, & \text{概率 } 1/4\end{cases}$$

求(a)$E(3X+2Y)$，(b)$E(2X^2-Y^2)$，(c)$E(XY)$，(d)$E(X^2Y)$.

3.56　令 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 n 个随机变量，它们的分布是相同的.

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{概率 } 1/2\\ 2, & \text{概率 } 1/3\\ -1, & \text{概率 } 1/6\end{cases}$$

求(a)$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)$，(b)$E(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)$.

方差和标准差

3.57　求抛掷一次一枚匀称的骰子，它向上的点数的(a)方差，(b)标准差.

3.58　令 X 是随机变量，它具有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}1/4, & -2\leqslant x\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(a)$\mathrm{Var}(X)$，(b)σ_X.

3.59　令 X 是随机变量，它具有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(a)$\mathrm{Var}(X)$，(b)σ_X.

3.60　求(a)习题 3.43 中的，和(b)习题 3.44 中的随机变量 X 的方差和标准差.

3.61　随机变量 X 有 $E(X)=2$，$E(X^2)=8$. 求(a)$\mathrm{Var}(X)$，(b)σ_X.

3.62　若随机变量 X 有 $E[(X-1)^2]=10$，$E[(X-2)^2]=6$，求(a)$E(X)$，(b)$\mathrm{Var}(X)$，(c)σ_X.

矩和矩母函数

3.63　求(a)下列随机变量的矩母函数：

$$X=\begin{cases}1/2, & \text{概率 } 1/2\\ -1/2, & \text{概率 } 1/2\end{cases}$$

(b)关于原点的头 4 个矩.

3.64　(a)求随机变量 X 的矩母函数，X 有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}x/2, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(b)利用(a)中的矩母函数去求关于原点的前 4 个矩.

3.65 求在(a)习题 3.43 中和(b)习题 3.44 中的关于均值的前 4 个矩.

3.66 (a)求有下列密度函数的随机变量的矩母函数:

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(b)确定关于原点的头 4 个矩.

3.67 在习题 3.66 中,求关于均值的前 4 个矩

3.68 令 X 有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求关于(a)原点的,(b)均值的 k 阶矩.

3.69 若 $M(t)$是随机变量 X 的矩母函数,证明关于均值的 3 阶和 4 阶矩由下列式子给出:

$$\mu_3=M'''(0)-3M''(0)M'(0)+2[M'(0)]^3$$
$$\mu_4=M^{(iv)}(0)-4M'''(0)M'(0)+6M''(0)[M'(0)]^2-3[M'(0)]^4$$

特征函数

3.70 求随机变量

$$X=\begin{cases}a, & \text{概率 } p\\ b, & \text{概率 } q=1-p\end{cases}$$

的特征函数.

3.71 求有下列密度函数的随机变量 X 的特征函数:

$$f(x)=\begin{cases}1/2a, & |x|\leqslant a\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

3.72 求有下列密度函数的随机变量的特征函数:

$$f(x)=\begin{cases}x/2, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

3.73 令

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{概率 } 1/2\\ -1, & \text{概率 } 1/2\end{cases}$$

是独立的随机变量($k=1,2,\cdots,n$),证明随机变量

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$$

的特征函数是$[\cos(\omega/\sqrt{n})]^n$.

3.74 证明当 $n\to\infty$时,习题 3.73 中的特征函数接近 $e^{-\omega^2/2}$.(提示:对特征函数取对数并且利用洛必达法则)

协方差和相关系数

3.75 令 X 和 Y 是随机变量,它们有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(a)$\mathrm{Var}(X)$,(b)$\mathrm{Var}(Y)$,(c)σ_X,(d)σ_Y,(e)σ_{XY},(f)ρ.

3.76 若联合密度函数是

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

做习题 3.75.

3.77 对习题 2.56 中的随机变量求(a)$\mathrm{Var}(X)$,(b)$\mathrm{Var}(Y)$,(c)σ_X,(d)σ_Y,(e)σ_{XY},(f)ρ.

3.78 对习题 2.94 中的随机变量,做习题 3.77.

3.79 若 $E(X)=2$, $E(Y)=3$, $E(XY)=10$, $E(X^2)=9$, $E(Y^2)=16$,求(a)协方差,(b)两个随机变量 X 和 Y 的相关系数.

3.80 两个随机变量 X 和 Y 的相关系数是 $-1/4$,而它们的方差是 3 和 5.求协方差.

条件期望,方差和矩

3.81 令 X 和 Y 有联合密度函数:

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求(a)给定 X 时 Y 的,和(b)给定 Y 时 X 的条件期望.

3.82 若 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ 0, & 其他\end{cases}$

做习题 3.81.

3.83 令 X 和 Y 有表 2-9 中给出的联合概率函数.求(a)给定 X 时 Y 的,和(b)给定 Y 时 X 的条件期望.

3.84 求对习题 3.81 的分布的(a)给定 X 时 Y 的,和(b)给定 Y 时 X 的条件方差.

3.85 对习题 3.82 中的分布,做习题 3.84.

3.86 对习题 2.94 中的分布,做习题 3.84.

切比雪夫不等式

3.87 随机变量 X 有均值 3 和方差 2.利用切比雪夫不等式去求(a)$P(|X-3|\geqslant 2)$,和(b)$P(|X-3|\geqslant 1)$的上界.

3.88 对离散的变量 X 证明切比雪夫不等式(提示:见习题 3.30).

3.89 随机变量 X 有密度函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty<x<\infty$.(a)求 $P(|X-\mu|>2)$,(b)利用切比雪夫不等式去求 $P(|X-\mu|>2)$的上界,并与(a)中的结果作比较.

大数定律

3.90 描述弱大数定律可表作

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|<\varepsilon\right)=1$$

并作解释.

3.91 令 $X_k(k=1,\cdots,n)$是 n 个独立的随机变量,

$$X_k=\begin{cases}1, & 概率\ p\\ 0, & 概率\ q=1-p\end{cases}$$

(a)若 X_k 解释为一枚硬币在第 k 次抛掷中的正面数,对 $S_n=X_1+\cdots+X_n$ 的解释是什么?

(b)描述在这种情形下,大数定律就成为

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)=0$$

并解释这个结果.

中心趋势的其他测度

3.92 求具有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geqslant 0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

的随机变量 X 的(a)众数和(b)中位数,(c)并将它们与均值作比较.

3.93 若密度函数是

$$f(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

做习题 3.92.

3.94 随机变量 X 由下式确定:

$$X=\begin{cases}2, & 概率\ 1/3\\ -1, & 概率\ 2/3\end{cases}$$

求 X 的(a)中位数和(b)众数,(c)并与均值作比较.

3.95 求数集 1,3,2,1,5,6,3,3 的(a)中位数和(b)众数,(c)并与均值作比较.

分位数

3.96 求密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的随机变量的(a)0.25,(b)0.75 的分位数值.

3.97 求密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}c(x-x^3), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的随机变量的(a)0.10,(b)0.25,(c)0.75,(d)0.90 的分位数值,这里 c 是常数.

离差的其他测度

3.98 求习题 3.96 中的随机变量的(a)半四分位数间距和(b)平均偏差.

3.99 对习题 3.97 中的随机变量,做习题 3.98.

3.100 求下列情形的每一个中的随机变量 X 的平均偏差:

(a) $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, (b) $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty<x<\infty$.

3.101 求情形(a)习题 3.96 中,(b)习题 3.100(a)中,随机变量 X 与其均值之差大于半四分位数间距的概率.

偏度和峰度

3.102 求习题 3.100(a)中的分布的(a)偏度和(b)峰度系数.

3.103 若 X 的密度函数是

$$f(x)=\begin{cases}c\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right), & |x|\leqslant a\\ 0, & |x|>a\end{cases}$$

这里 c 是常数,求(a)偏度系数,(b)峰度系数.

3.104 对密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

的分布,求(a)偏度系数,(b)峰度系数.

综合问题

3.105 令 X 是随机变量,取值 2,1 和 3,它们各自的概率为 1/3,1/6 和 1/2.求(a)均值,(b)方差,(c)矩母函数,(d)特征函数,(e)关于均值的三阶矩.

3.106 若 X 有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}c(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

这里 c 是常数,做习题 3.105.

3.107 假设连续地抛掷 3 枚匀称的骰子.求点数和的(a)均值和(b)方差.

3.108 令 X 是随机变量,它有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}cx, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

这里 c 是常数.求(a)均值,(b)方差,(c)矩母函数,(c)特征函数,(c)偏度系数,(f)峰度系数.

3.109 令 X 和 Y 有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}cxy, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(a)$E(X^2+Y^2)$,(b)$E(\sqrt{X^2+Y^2})$.

3.110 若 X 和 Y 是独立同分布的随机变量,它们有密度函数 $f(u)=(2\pi)^{-1/2}e^{-u^2/2}$, $-\infty<u<\infty$,做习题3.109.

3.111 令 X 是随机变量,它有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

并且令 $Y=X^2$.求(a)$E(X)$,(b)$E(Y)$,(c)$E(XY)$.

补充习题答案

3.43 (a)1, (b)7, (c)6

3.44 (a)3/4, (b)1/4, (c)3/5

3.45 (a)1, (b)2, (c)1

3.46 10.5

3.47 3

3.48 (a)1, (b)1, (c)1/4

3.50 (a)7/10, (b)6/5, (c)19/10, (d)5/6

3.52 (a)2/3, (b)2/3, (c)4/3, (d)4/9

3.54 (a)7/12, (b)7/6, (c)5/12, (d)5/3, (e)7/4, (f)2/3

3.55 (a)5/2, (b)$-55/12$, (c)1/4, (d)1/4

3.56 (a)n, (b)$2n$

3.57 (a)35/12, (b)$\sqrt{35/12}$

3.58 (a)4/3, (b)$\sqrt{4/3}$

3.59 (a)1, (b)1

3.60 (a)$\mathrm{Var}(X)=5$, $\sigma_X=\sqrt{5}$, (b)$\mathrm{Var}(X)=3/80$, $\sigma_X=\sqrt{15}/20$

3.61 (a)4, (b)2

3.62 (a)7/2, (b)15/4, (c)$\sqrt{15}/2$

3.63 (a)$\frac{1}{2}(e^{t/2}+e^{-t/2})=\cosh(t/2)$, (b)$\mu=0,\mu_2'=1,\mu_3'=0,\mu_4'=1$

3.64 (a)$(1+2te^{2t}-e^{2t})/2t^2$, (b)$\mu=4/3,\mu_2'=2,\mu_3'=16/5,\mu_4'=16/3$

3.65 (a)$\mu_1=0,\mu_2=5,\mu_3=-5,\mu_4=35$

(b)$\mu_1=0,\mu_2=3/80,\mu_3=-121/160,\mu_4=2\,307/8\,960$

3.66 (a)$1/(1-t)$, $|t|<1$, (b)$\mu=1,\mu_2'=2,\mu_3'=6,\mu_4'=24$

3.67 $\mu_1=0,\mu_2=1,\mu_3=2,\mu_4=33$

3.68 (a)$(b^{k+1}-a^{k+1})/(k+1)(b-a)$, (b)$[1+(-1)^k](b-a)^k/2^{k+1}(k+1)$

3.70 $pe^{i\omega a}+qe^{i\omega b}$

3.71 $(\sin a\omega)/a\omega$

3.72 $(e^{2i\omega}-2i\omega e^{2i\omega}-1)/2\omega^2$

3.75 (a)11/144, (b)11/144, (c)$\sqrt{11}/12$, (d)$\sqrt{11}/12$, (e)$-1/144$, (f)$-1/11$

3.76 (a)1, (b)1, (c)1, (d)1, (e)0, (f)0

3.77 (a)73/960, (b)73/960, (c)$\sqrt{73/960}$, (d)$\sqrt{73/960}$, (e)$-1/64$, (f)$-15/73$

3.78 (a)233/324, (b)233/324, (c)$\sqrt{233}/18$, (d)$\sqrt{233}/18$, (e)$-91/324$, (f)$-91/233$

3.79 (a)4, (b)$4/\sqrt{35}$

3.80 $-\sqrt{15}/4$

3.81 (a)$(3x+2)/(6x+3)$ 对 $0\leqslant x\leqslant 1$, (b)$(3y+2)/(6y+3)$ 对 $0\leqslant y\leqslant 1$

3.82 (a)1/2 对 $x\geqslant 0$, (b)1 对 $y\geqslant 0$

3.83　(a)

X	0	1	2
$E(Y\|X)$	4/3	1	5/7

(b)

Y	0	1	2
$E(X\|Y)$	4/3	7/6	1/2

3.84　(a)$\frac{6x^2+6x+1}{18(2x+1)^2}$　对　$0\leqslant x\leqslant 1$，　(b)$\frac{6y^2+6y+1}{18(2y+1)^2}$　对　$0\leqslant y\leqslant 1$

3.85　(a)1/9，　(b)1

3.86　(a)

X	0	1	2
$\mathrm{Var}(Y\|X)$	5/9	4/5	24/49

(b)

Y	0	1	2
$\mathrm{Var}(X\|Y)$	5/9	29/36	7/12

3.87　(a)1/2，　(b)2(无用的)

3.89　(a)e^{-2}，　(b)0.5

3.92　(a)+0，　(b)ln2，　(c)1

3.93　(a)$1/\sqrt{3}$，　(b) $\sqrt{1-(1-\sqrt{2})}$，　(c)8/15

3.94　(a)不存在，　(b)−1，　(c)0

3.95　(a)3，　(b)3，　(c)3

3.96　(a)$1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$，　(b)1/2

3.97　(a) $\sqrt{1-(3/\sqrt{10})}$，　(b) $\sqrt{1-(\sqrt{3}/2)}$，　(c) $\sqrt{1/2}$，　(d) $\sqrt{1-(1/\sqrt{10})}$

3.98　(a)1，　(b)$(\sqrt{3}-1)/4$，　(c)16/81

3.99　(a)1，　(b)0.17，　(c)0.051

3.100　(a)$1-2e^{-1}$，　(b)不存在

3.101　(a)$(5-2\sqrt{3})/3$，　(b)$(3-2e^{-1}\sqrt{3})/3$

3.102　(a)2，　(b)9

3.103　(a)0，　(b)$24/5a$

3.104　(a)2，　(b)9

3.105　(a)7/3，　(b)5/9，　(c)$(e^t+2e^{2t}+3e^{3t})/6$，　(d)$(e^{i\omega}+2e^{2i\omega}+3e^{3i\omega})/6$，　(e)−7/27

3.106　(a)1/3，　(b)1/18，　(c)$2(e^t-1-t)/t^2$，　(d)$-2(e^{i\omega}-1-i\omega)/\omega^2$，　(e)1/135

3.107　(a)21/2，　(b)35/4

3.108　(a)4/3，　(b)2/9，　(c)$(1+2te^{2t}-e^{2t})/2t^2$，　(d)$-(1+2i\omega e^{2i\omega}-e^{2i\omega})/2\omega^2$，　(e)$-2\sqrt{18}/15$，(f)12/5

3.109　(a)1，　(b)$8(2\sqrt{2}-1)/15$

3.110　(a)2，　(b) $\sqrt{2\pi}/2$

3.111　(a)0，　(b)1/3，　(c)0

第四章 若干特殊的概率分布

二项分布

假设我们从事一个实验,例如反复地抛掷一枚硬币或骰子,或反复地从一个罐里选择一个弹子.每一次抛掷或选择就称之为一次试验.在任一次单个的试验中都存在一个该特指事件的概率,例如特指的事件是硬币的正面,骰子的4点,或选择一个红色的弹子.在某些情形中,概率是不因从一次试验到下一次试验而变化(像抛掷一枚硬币或骰子).于是称这种试验是独立的,且在伯努利(J. Bernoulli)之后,常称它们为伯努利试验,伯努利在17世纪末调查研究了这种试验.

令 p 是一个事件的概率(称为成功的概率),该事件发生在任一次单个的伯努利试验中.则 $q=1-p$ 是在任一次单个的试验中失败的事件的概率(称为失败的概率).则事件在 n 次试验中恰发生 x 次的概率(即成功 x 次而失败 $n-x$ 次)由以下概率函数给出:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \tag{1}$$

这里随机变量 X 表示在 n 次试验中成功的次数,$x=0,1,\cdots,n$.

例4.1 抛掷一枚匀称的硬币6次,2次正面朝上的概率是

$$P(X=2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{6!}{2!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{15}{64}$$

离散的概率函数(1)常称之为二项分布,由于对于 $x=0,1,2,\cdots,n$,它对应于二项展开式中的成功的项

$$(q+p)^n = q^n + \binom{n}{1} q^{n-1}p + \binom{n}{2} q^{n-2}p^2 + \cdots + p^n$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \tag{2}$$

具有 $n=1$ 的二项分布的特殊的情形也称之为伯努利分布.

二项分布的若干性质

在表4-1中列出了二项分布的若干重要的性质.

表 4-1

均值	$\mu = np$
方差	$\sigma^2 = npq$
标准差	$\sigma = \sqrt{npq}$
偏度系数	$\alpha_3 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$
峰度系数	$\alpha_4 = 3 + \frac{1-6pq}{npq}$
矩母函数	$M(t) = (q+pe^t)^n$
特征函数	$\phi(\omega) = (q+pe^{i\omega})^n$

例 4.2　抛掷一枚匀称硬币100次,其正面的均值是 $\mu=(100)\frac{1}{2}=50$,而标准差

$$\sigma=\sqrt{(100)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}=5$$

伯努利试验的大数定律

大数定律在伯努利试验的情形有一个有趣的解释,我们在以下定理中加以介绍.

定理 4-1(伯努利试验的大数定律)　令 X 是在 n 次伯努利试验中产生成功数的随机变量,于是 X/n 是成功的比例.若 p 是成功的概率,ϵ 是任一正数,则

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\geqslant\epsilon\right)=0 \tag{3}$$

换句话说,最后成功的比例很可能最终变成 p,即 X/n 将极接近在一次单个的试验中,你希望成功的概率 p.在某种意义上该定律证明以经验为根据的概率的定义的用处.强大数定律提供一个更强的结果,用符号表示成 $\lim\limits_{x\to\infty}X/n=p$,即实际上 X/n 收敛到 p 除了在一些可以忽略的情形.

正态分布

正态分布是连续的概率分布的最重要的例子之一,有时称为高斯分布.该分布的密度函数由下式给出:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\qquad -\infty<x<\infty \tag{4}$$

这里 μ 和 σ 分别是均值和标准差.对应的分布函数由下式给出:

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-(v-\mu)^2/2\sigma^2}dv \tag{5}$$

若 X 有由(5)给出的分布函数,我们就说随机变量 X 是具有均值 μ 和方差 σ^2 的正态分布.

若我们令 Z 是对应于 X 的标准变量,即若我们令

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \tag{6}$$

则 Z 的均值是0,方差是1.在这种情形,Z 的密度函数可从(4)式令 $\mu=0$ 和 $\sigma=1$ 而得到

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \tag{7}$$

常称之为标准正态密度函数.对应的分布函数由下式给出:

$$F(z)=P(Z\leqslant z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-u^2/2}du=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{z}e^{-u^2/2}du \tag{8}$$

我们有时称标准变量 Z 的值 z 为标准得分.函数 $F(z)$ 与广泛地列表的误差函数 erf(z) 有关系.我们有

$$\text{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z}e^{-u^2}du,\quad F(z)=\frac{1}{2}\left[1+\text{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right] \tag{9}$$

在图 4-1 中显示的密度函数(7)的图形,有时称之为标准正态曲线,在这个图形里,我们表示出均值附近1,2和3倍标准差内的面积(即 $z=-1$ 和 $z=+1$, $z=-2$ 和 $z=+2$, $z=-3$ 和 $z=+3$ 之间)分别等于总面积的68.27%,95.45%和99.73%.这意味着

$$\begin{aligned}P(-1\leqslant Z\leqslant 1)&=0.6827\\P(-2\leqslant Z\leqslant 2)&=0.9545\\P(-3\leqslant Z\leqslant 3)&=0.9973\end{aligned} \tag{10}$$

在附录C里给出一个表,该表给出在 $z=0$ 和任一 z 的正值的纵距为界的曲线下的面积.根据该表可以利用曲线关于 $z=0$ 的对称性,找到任两个纵距之间的面积.

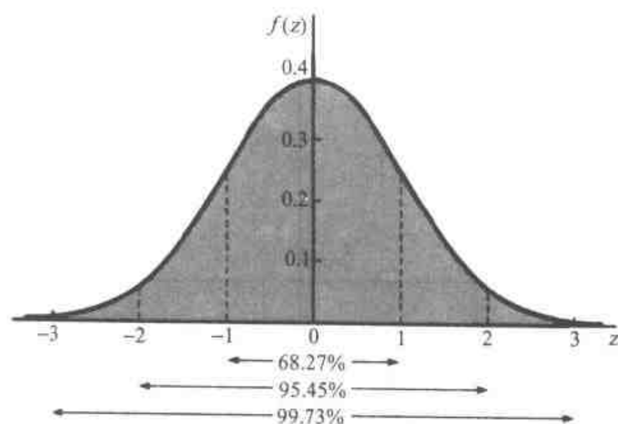


图 4-1

正态分布的若干性质

在表 4-2 里，我们列出一般的正态分布的若干重要的性质.

表 4-2

均值	μ
方差	σ^2
标准差	σ
偏度系数	$\alpha_3=0$
峰度系数	$\alpha_4=3$
矩母函数	$M(t)=e^{\mu t+(\sigma^2t^2/2)}$
特征函数	$\phi(\omega)=e^{i\mu\omega-(\sigma^2\omega^2/2)}$

二项分布与正态分布之间的关系

若 n 是大的数且 p 或 q 都不太接近于零. 二项分布能极近似于由下式给出的标准随机变量的正态分布：

$$Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}} \tag{11}$$

这里 X 是在 n 次伯努利试验中产生成功次数的随机变量，p 是成功的概率. n 增大近似值变得更好，且在极限情形它是精确值(见习题 4.17). 实际上，若 np 和 nq 都大于 5，近似值是很好的. 事实上二项分布接近正态分布可写成下式来描述：

$$\lim_{n\to\infty}P\left(a\leqslant\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\leqslant b\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-u^2/2}du \tag{12}$$

就是说标准随机变量$(X-np)/\sqrt{npq}$是渐近地正态.

泊松分布

令 X 是一个离散的随机变量，取值 0, 1, 2, …, X 的概率函数由下式给出：

$$f(x)=P(X=x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},\quad x=0,1,2,\cdots \tag{13}$$

这里 λ 是已知的正常数. 该分布称为泊松(Poisson)分布，具有这种分布的一个随机变量称为

泊松分布的随机变量.

在(13)式中的 $f(x)$ 的值能利用附录 G 得到，它对 λ 的各种值给出 $e^{-\lambda}$ 的值.

泊松分布的若干性质

在表 4-3 中列出了泊松分布的若干性质.

表 4-3

均值	$\mu=\lambda$
方差	$\sigma^2=\lambda$
标准差	$\sigma=\sqrt{\lambda}$
偏度系数	$\alpha_3=1/\sqrt{\lambda}$
峰度系数	$\alpha_4=3+(1/\lambda)$
矩母函数	$M(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$
特征函数	$\phi(\omega)=e^{\lambda(e^{i\omega}-1)}$

二项分布与泊松分布之间的关系

在二项分布(1)中，若 n 是大的数而事件发生的概率 p 接近零，于是 $q=1-p$ 就接近 1，这样的事件称之为稀疏事件. 事实上，若试验的次数至少是 50($n\geqslant 50$)而 np 小于 5，我们将把这样的事件看作稀疏的. 对于这种情形，二项分布是极近似于具有 $\lambda=np$ 的泊松分布(13). 把表 4-1 与表 4-3 作比较，在表 4-1 里由于 $\lambda=np$, $q\approx 1$ 且 $p\approx 0$，我们得到表 4-3 的结果.

泊松分布与正态分布之间的关系

由于存在着二项分布与正态分布之间的关系和二项分布与泊松分布之间的关系，我们期望泊松分布与正态分布之间也有关系. 事实正是如此. 若 X 是(13)式中的泊松随机变量，$(X-\lambda)/\sqrt{\lambda}$ 是对应的标准随机变量，则

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\left(a\leqslant \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\leqslant b\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-u^2/2}du \tag{14}$$

即当 $\lambda\to\infty$ 时，泊松分布趋近于正态分布，或 $(X-\lambda)/\sqrt{\lambda}$ 是渐近地正态.

中心极限定理

(12)式与(14)式之间的相似，自然使我们问到是否除了二项分布和泊松分布外，还存在其它的分布也与正态分布在极限的情形有关系. 下列定理揭示出一大类的分布有这样的性质.

定理 4-2（中心极限定理） 令 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立同分布的随机变量且具有有限均值 μ 和方差 σ^2. 若 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n(n=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a\leqslant \frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant b\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-u^2/2}du \tag{15}$$

那就是，对应于 S_n 的标准随机变量 $(S_n-n\mu)/\sigma\sqrt{n}$ 是渐近地正态.

该定理在更一般的条件下也是正确的；例如，当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立的随机变量，它们具有相同的均值和方差，但不需要是同分布的，在这样的条件下定理也成立.

多项分布

假设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是不相容的，且发生的概率分别是 $p_1,p_2,\cdots,p_k$，这里 $p_1+p_2+\cdots+p_k=1$. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 是随机变量，分别给出在 n 次总试验中 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 发生的

次数,因此 $X_1+X_2+\cdots+X_n=n$,则

$$P(X_1=n_1,X_2=n_2,\cdots,X_k=n_k)=\frac{n}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k} \tag{16}$$

是随机变量 $X_1,\cdots,X_k$ 的联合概率函数,这里 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$.

由于(16)式是$(p_1+p_2+\cdots+p_n)^n$ 的多项式表示式中的一般项,这个分布是二项分布的推广,称之为多项分布.

例 4.3 若抛掷一枚匀称的骰子 12 次,各有两次恰得到 1,2,3,4,5 和 6 点的概率是

$$P(X_1=2,X_2=2,\cdots,X_6=2)=\frac{12!}{2!2!2!2!2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$=\frac{1\,925}{559\,872}=0.00344$$

在 n 次试验中,$A_1,A_2,\cdots,A_k$ 发生的期望次数分别是 $np_1,np_2,\cdots,np_k$,即

$$E(X_1)=np_1,\ E(X_2)=np_2,\ \cdots,\ E(X_k)=np_k \tag{17}$$

超几何分布

假设一个盒子里含 b 个蓝色的弹子和 r 个红色的弹子.要我们作一个实验,包含 n 次试验,每次随机地选取一个弹子,观察它的颜色,然后把该弹子放回盒里.这类实验常归属于有放回抽样.在这样的情形里,若 X 是一个随机变量,它表示在 n 次试验中选中蓝色的弹子的数目,则利用二项分布(1)式,我们知道成功数 x 的确切概率是

$$P(X=x)=\binom{n}{x}\frac{b^x r^{n-x}}{(b+r)^n},\quad x=0,1,\cdots,n \tag{18}$$

由于 $p=b/(b+r)$,有 $q=1-p=r/(b+r)$.

若为了无放回抽样而修改以上的叙述,即选取弹子后不放回盒里,则

$$P(X=x)=\frac{\binom{b}{x}\binom{r}{n-x}}{\binom{b+r}{n}},\quad x=\max(0,n-r),\cdots,\min(n,b) \tag{19}$$

这是超几何分布.该分布的均值和方差是

$$\mu=\frac{nb}{b+r},\quad \sigma^2=\frac{nbr(b+r-n)}{(b+r)^2(b+r-1)} \tag{20}$$

若我们令蓝的和红的弹子的总数是 N,而蓝的和红的弹子的比例分别是 p 和 $q=1-p$,则

$$p=\frac{b}{b+r}=\frac{b}{N},\quad q=\frac{r}{b+r}=\frac{r}{N}\quad 或\quad b=Np,\quad r=Nq \tag{21}$$

于是(19)和(20)分别变成

$$P(X=x)=\frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{22}$$

$$\mu=np,\quad \sigma^2=\frac{npq(N-n)}{N-1} \tag{23}$$

注意到,当 $N\to\infty$(或与 n 比较 N 是大的),(22)式就简化为(18)式,能写成

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \tag{24}$$

(23)式简化为

$$\mu=np,\quad \sigma^2=npq \tag{25}$$

与表 4-1 里的头两项一致.该结果正是我们所期望的,对于大的 N,实际上无放回抽样是等同于有放回抽样.

均匀分布

称随机变量 X 在 $a \leqslant x \leqslant b$ 内是均匀分布的,若它的密度函数是

$$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{26}$$

并且称该分布是均匀分布.

分布函数由下式给出:

$$F(x)=P(X \leqslant x)=\begin{cases}0, & x<a \\ (x-a)/(b-a), & a \leqslant x<b \\ 1, & x \geqslant b\end{cases} \tag{27}$$

均值和方差分别是

$$\mu=\frac{1}{2}(a+b), \quad \sigma^2=\frac{1}{12}(b-a)^2 \tag{28}$$

柯西分布

称随机变量 X 是柯西分布的,或称 X 有柯西分布,若 X 的密度函数是

$$f(x)=\frac{a}{\pi\left(x^2+a^2\right)}, \quad a>0,\ -\infty<x<\infty \tag{29}$$

该密度函数关于 $x=0$ 是对称的,从而它的中位数是零.可是,均值、方差和更高的矩都不存在,类似地,矩母函数不存在.尽管如此,特征函数却是存在的且由下式给出:

$$\phi(\omega)=e^{-a\omega} \tag{30}$$

伽马分布

称随机变量 X 有伽马分布或是伽马分布的,若密度函数是

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, & x>0 \\ 0, & x \leqslant 0\end{cases} \quad (\alpha, \beta>0) \tag{31}$$

这里 $\Gamma(\alpha)$是伽马函数(见附录 A).均值和方差由下式给出:

$$\mu=\alpha\beta, \qquad \sigma^2=\alpha\beta^2 \tag{32}$$

矩母函数和特征函数分别由下式给出:

$$M(t)=(1-\beta t)^{-\alpha}, \qquad \phi(\omega)=(1-\beta i\omega)^{-\alpha} \tag{33}$$

贝塔分布

称随机变量 X 有贝塔分布或是贝塔分布的,若密度函数是

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases} \quad (\alpha, \beta>0) \tag{34}$$

这里 $B(\alpha,\beta)$是贝塔函数(见附录 A).由于贝塔与伽马函数之间的关系(9),附录 A,贝塔分布也可由下列密度函数来定义:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{35}$$

这里 α,β 是正的.均值和方差是

$$\mu=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad \sigma^2=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \tag{36}$$

对于 $\alpha>1, \beta>1$ 存在惟一的众数

$$x_{众数} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2} \tag{37}$$

卡方(χ^2)分布

令 $X_1, X_2, \cdots, X_\nu$ 是 ν 个独立的正态分布的随机变量，它们的均值为零和方差为 1. 考虑随机变量

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_\nu^2 \tag{38}$$

这里 χ^2 称为卡方. 则对 $x \geqslant 0$ 可表示如下：

$$P(\chi^2 \leqslant x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\int_0^x u^{(\nu/2)-1}e^{-u/2}du \tag{39}$$

并且对于 $x<0, P(\chi^2 \leqslant x) = 0$.

称由(39)式定义的分布为卡方分布，称 ν 为自由度数，由(39)定义的分布有由下式给出的对应的密度函数：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{(\nu/2)-1}e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{40}$$

由此可知，χ^2 分布是 $\alpha = \nu/2, \beta = 2$ 的伽马分布的一个特殊情形. 因此

$$\mu = \nu, \quad \sigma^2 = 2\nu, \quad M(t) = (1-2t)^{-\nu/2}, \quad \phi(\omega) = (1-2i\omega)^{-\nu/2} \tag{41}$$

对于大的 $\nu(\nu \geqslant 30)$，我们可描述 $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$ 是很接近均值为 0 和方差为 1 的正态分布的.

以下的 3 个定理在以后的工作中将是有用的：

定理 4-3　令 $X_1, X_2, \cdots, X_\nu$ 是有均值为 0 与方差为 1 的独立正态分布的随机变量. 则 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_\nu^2$ 是有 ν 个自由度的卡方分布的随机变量.

定理 4-4　令 $U_1, U_2, \cdots, U_k$ 是分别有 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_k$ 个自由度的独立的卡方分布的随机变量. 则它们的和 $W = U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ 是有 $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k$ 个自由度的卡方分布的随机变量.

定理 4-5　令 V_1 和 V_2 是独立的随机变量. 假设 V_1 是有 ν_1 个自由度的卡方分布的随机变量，而 $V = V_1 + V_2$ 是有 ν 个自由度的卡方分布，这里 $\nu > \nu_1$. 则 V_2 是有 $\nu - \nu_1$ 个自由度的卡方分布的随机变量.

联系到卡方分布，t 分布，F 分布和其他的分布，在统计学的工作中，随机变量和随机变量的值两者常用相同的符号. 因此，对 ν 个自由度的卡方分布的百分位数值用 $\chi^2_{p,\nu}$ 表示，或若对 ν 理解时，就简记作 χ^2_p. 而不用 $\chi_{p,\nu}$ 或 χ_p 表示(见附录 E). 这是不太清晰的记法，读者务必仔细用它，特别当在密度函数中变换变量时.

学生氏 t 分布

若随机变量有密度函数

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{\nu}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \qquad -\infty < t < \infty \tag{42}$$

就称它有学生氏 t 分布，简称为有 ν 个自由度的 t 分布. 若 ν 是大的($\nu \geqslant 30$)，$f(t)$ 的图形很近似于图 4-2 中表出的标准正态曲线. 对于 ν 个自由度的 t 分布的百分位数值用 $t_{p,\nu}$ 表示或若对 ν 理解时就简记作 t_p. 给出这样的值的表，见附录 D. 由于 t 分布是对称的，$t_{1-p} = -t_p$；例如，$t_{0.5} = -t_{0.95}$.

对于 t 分布，我们有

$$\mu = 0 \quad 与 \quad \sigma^2 = \frac{\nu}{\nu - 2} \quad (\nu > 2). \tag{43}$$

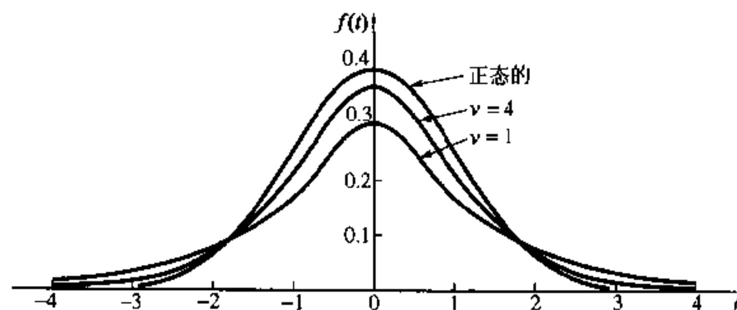


图 4-2

下列定理在以后的工作中是重要的.

定理 4-6 令 Y 和 Z 是独立的随机变量,这里 Y 是均值为 0 和方差为 1 的正态分布的随机变量,而 Z 是有 ν 个自由度的卡方分布的随机变量.则随机变量

$$T = \frac{Y}{\sqrt{Z/\nu}} \tag{44}$$

有 ν 个自由度的 t 分布.

F 分布

称随机变量是有 ν_1 和 ν_2 个自由度的 F 分布,若它的密度函数由下式给出:

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_2}{2}\right)} \nu_1^{\nu_1/2}\nu_2^{\nu_2/2} u^{(\nu_1/2)-1}(\nu_2+\nu_1 u)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}, & u > 0 \\ 0, & u \leqslant 0 \end{cases} \tag{45}$$

对于 ν_1, ν_2 个自由度的 F 分布的百分位数值用 F_{p,ν_1,ν_2} 表示或若对 ν_1, ν_2 理解就简记 F_p.对于给出这样的值的表,这里 $p=0.95$ 和 $p=0.99$,见附录 F.

均值与方差分别由下式给出:

$$\mu = \frac{\nu_2}{\nu_2-2}(\nu_2>2), \quad \sigma^2 = \frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-4)(\nu_2-2)^2} \quad (\nu_2>4) \tag{46}$$

该分布有惟一的众数

$$u_{众数} = \left(\frac{\nu_1-2}{\nu_1}\right)\left(\frac{\nu_2}{\nu_2+2}\right) \quad (\nu_1>2) \tag{47}$$

以下定理在以后的工作中是重要的:

定理 4-7 令 V_1 和 V_2 是分别有 ν_1 和 ν_2 个自由度的卡方分布的独立随机变量.则随机变量

$$V = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2} \tag{48}$$

是有 ν_1 和 ν_2 个自由度的 F 分布.

定理 4-8 $$F_{1-p,\nu_2,\nu_1} = \frac{1}{F_{p,\nu_1,\nu_2}}$$

卡方,t 和 F 分布之间的关系

定理 4-9 $$F_{1-p,1,\nu} = t_{1-(p/2),\nu}^2$$

定理 4-10 $$F_{p,\nu,\infty} = \frac{\chi_{p,\nu}^2}{\nu}$$

二元正态分布

两个连续的随机变量 X 和 Y 的正态分布的一般情形由以下的联合密度函数给出：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\Big/2(1-\rho^2)\right\} \tag{49}$$

这里 $-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$; μ_1,μ_2 是 X 和 Y 的均值; σ_1,σ_2 是 X 和 Y 的标准差; ρ 是 X 和 Y 之间的相关系数. 我们常把(49)称作二元正态分布. 对于任何联合分布, 条件 $\rho=0$ 对独立的随机变量是必要的(见定理 3-15). 在(49)式的情形里, 这个条件也是充分的(见习题 4.51).

其他分布

以下列出的分布中, 常数 $\alpha,\beta,a,b,\cdots$ 都取作正的, 除非另有陈述. 特征函数 $\phi(\omega)$ 是从矩母函数得到的, 这里令 $t=i\omega$.

1. 几何分布

$$f(x)=P(X=x)=pq^{x-1},\qquad x=1,2,\cdots$$

$$\mu=\frac{1}{p},\qquad \sigma^2=\frac{q}{p^2},\qquad M(t)=\frac{pe^t}{1-qe^t}$$

随机变量 X 表示伯努利试验的次数, 且包括在试验中首次成功的那一次. p 是单次试验中成功的概率.

2. 帕斯卡(Pascal)分布或负二项分布

$$f(x)=P(X=x)=\binom{x-1}{r-1}p^rq^{x-r},\qquad x=r,r+1,\cdots$$

$$\mu=\frac{r}{p},\qquad \sigma^2=\frac{rq}{p^2},\qquad M(t)=\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$$

随机变量 X 表示伯努利试验的次数且包括在试验中第 r 次成功的那一次. $r=1$ 的特殊情形给出了几何分布.

3. 指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

$$\mu=\frac{1}{\alpha},\qquad \sigma^2=\frac{1}{\alpha^2},\qquad M(t)=\frac{\alpha}{\alpha-t}$$

4. 威布尔(Weibull)分布

$$f(x)=\begin{cases}abx^{b-1}e^{-ax^b}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

$$\mu=a^{-1/b}\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right),\qquad \sigma^2=a^{-2/b}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{b}\right)\right]$$

5. 麦克斯韦(Maxwell)分布

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2/\pi}\,\alpha^{3/2}x^2e^{-\alpha x^2/2}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

$$\mu=2\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}},\qquad \sigma^2=\left(3-\frac{8}{\pi}\right)\alpha^{-1}$$

习题解答

二项分布

4.1 求抛掷一枚匀称的硬币3次，出现以下四种情形的概率：

(a)3 个正面，(b)2 个反面和 1 个正面，(c)至少 1 个正面，(d)不多于 1 个反面.

解 方法 1 令 H 表示正面，T 表示反面.例如，假设我们特指 HTH，其含意是第一次抛掷出现正面，第二次抛掷出现反面，第三次抛掷出现正面.由于每次抛掷有两种可能发生(正面或反面)，总共有(2)(2)(2)=8 种可能结果，即在样本空间里的样本点.这些是

$$HHH,HHT,HTH,HTT,TTH,THH,THT,TTT$$

对于一枚匀称的硬币，出现以上 8 种可能的每 1 种的概率等于 1/8.因此

(a)$P(3\text{ 个正面})=P(HHH)=\frac{1}{8}$

(b)$P(2\text{ 个反面与 }1\text{ 个正面})=P(HTT\cup TTH\cup THT)$

$$=P(HTT)+P(TTH)+P(THT)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

(c)P(至少 1 个正面)

$=P(1,2\text{ 或 }3\text{ 个正面})$

$=P(1\text{ 个正面})+P(2\text{ 个正面})+P(3\text{ 个正面})$

$=P(HTT\cup THT\cup TTH)+P(HHT\cup HTH\cup THH)+P(HHH)$

$=P(HTT)+P(THT)+P(TTH)+P(HHT)+P(HTH)+P(THH)+P(HHH)=\frac{7}{8}$

或者

$$P(\text{至少 1 个正面})=1-P(\text{无正面})=1-P(TTT)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

(d)$P(\text{不多于 1 个反面})=P(0\text{ 个反面或 }1\text{ 个反面})$

$=P(0\text{ 个反面})+P(1\text{ 个反面})$

$=P(HHH)+P(HHT\cup HTH\cup THH)$

$=P(HHH)+P(HHT)+P(HTH)+P(THH)$

$=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

方法 2(利用公式)

(a)$P(3\text{ 个正面})=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$

(b)$P(2\text{ 个反面与 }1\text{ 个正面})=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$

(c)$P(\text{至少 1 个正面})=P(1,2\text{ 或 }3\text{ 个正面})$

$=P(1\text{ 个正面})+P(2\text{ 个正面})+P(3\text{ 个正面})$

$=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1+\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{7}{8}$

或者

$P(\text{至少 1 个正面})=1-P(\text{无正面})$

$=1-\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$

(d)$P(\text{不多于 1 个反面})=P(0\text{ 个反面或 }1\text{ 个反面})$

$=P(0\text{ 个反面})+P(1\text{ 个反面})$

$=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

应该提及，随机变量的符号也可以用.例如，若我们令 X 是在 3 次抛掷中正面出现的次数，(c)可写成

$$P(\text{至少 1 个正面})=P(X\geqslant 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{7}{8}$$

我们将交替地利用这两种方法.

4.2 求在 5 次抛掷一枚匀称的骰子中，3 出现以下三种情形的概率：

(a)两次,(b)最多一次,(c)至少两次.

解 令随机变量 X 是在5次抛掷一枚匀称的骰子中,3出现的次数,我们有

$$\text{在单次抛掷中 3 出现的概率} = p = \frac{1}{6}$$

$$\text{在单次抛掷中 3 不出现的概率} = q = 1 - p = \frac{5}{6}$$

(a)$P(3\text{发生两次}) = P(X=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3\,888}$

(b)$P(3\text{最多发生一次}) = P(X\leqslant 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$$= \binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$= \frac{3\,125}{7\,776} + \frac{3\,125}{7\,776} = \frac{3\,125}{3\,888}$$

(c)P (3至少发生两次)

$= P(X\geqslant 2)$

$= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

$= \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^0$

$= \frac{625}{3\,888} + \frac{125}{3\,888} + \frac{25}{7\,776} + \frac{1}{7\,776} = \frac{763}{3\,888}$

4.3 求在4个孩子的家庭中,以下两种情形的概率:(a)至少1个男孩,(b)至少1个男孩且至少1个女孩.假设男孩的出生概率是1/2.

解 (a)$P(1\text{男孩}) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$, $P(2\text{男孩}) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

$$P(3\text{男孩}) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4},\quad P(4\text{男孩}) = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$$

则

$$P(\text{至少 1 男孩}) = P(1\text{男孩}) + P(2\text{男孩}) + P(3\text{男孩}) + P(4\text{男孩})$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

另解

$$P(\text{至少 1 男孩}) = 1 - P(\text{无男孩})$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

(b)$P(\text{至少 1 男孩且至少 1 女孩}) = 1 - P(\text{无男孩}) - P(\text{无女孩})$

$$= 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{7}{8}$$

我们也能用 X 表示4个孩子的家庭中的男孩数的随机变量来解决这个问题,例如,(a)变成

$$P(X\geqslant 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \frac{15}{16}$$

4.4 从每一个家庭有4个孩子的2000个家庭中,你期望多少家庭有(a)至少1个男孩,(b)2个男孩,(c)1或2个女孩,(d)无女孩?

解 参考习题4.3,我们知道

(a)至少1男孩的家庭的期望数 $= 2000\left(\frac{15}{16}\right) = 1875$

(b)2男孩的家庭的期望数 $= 2000\cdot P(2\text{男孩}) = 2000\left(\frac{3}{8}\right) = 750$

(c)$P(1\text{或}2\text{女孩}) = P(1\text{女孩}) + P(2\text{女孩}) = P(1\text{男孩}) + P(2\text{男孩}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

1或2女孩的家庭的期望数 $= 2000\left(\frac{5}{8}\right) = 1250$

(d)无女孩的家庭的期望数 $= 2000\left(\frac{1}{16}\right) = 125$

4.5 若用机器生产的螺栓有20%是有缺陷的,决定随机地选择4个螺栓,求(a)1个,(b)0

个,(c)小于 2 个螺栓是有缺陷的概率.

解 ☞ 有缺陷的螺栓的概率是 $p=0.2$,无缺陷的螺栓的概率是 $q=1-p=0.8$.令随机变量 X 是有缺陷的螺栓数.则

(a) $$P(X=1)=\binom{4}{1}(0.2)^1(0.8)^3=0.4096$$

(b) $$P(X=0)=\binom{4}{0}(0.2)^0(0.8)^4=0.4096$$

(c) $$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=0.4096+0.4096=0.8192$$

4.6 求在三次抛掷一对匀称的骰子中,至少一次得到总数为 7 的概率.

解 ☞ 在单次抛掷一对匀称的骰子,出现 7 的概率是 $p=1/6$(见习题 2.1),因此,在单次抛掷中,不出现 7 的概率是 $q=1-p=\frac{5}{6}$.

则

$$P(\text{在三次抛掷中无 7})=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$$

$$P(\text{在三次抛掷中至少一次出现 7})=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$$

4.7 随机变量 X 是二项分布的,求矩母函数.

解 ☞ **方法 1** 若 X 是二项分布的随机变量

$$f(x)=P(X=x)=\binom{n}{x}p^xq^{n-x}$$

则矩母函数由下式给出

$$\begin{aligned}M(t)=E(e^{tX})&=\sum e^{tx}f(x)\\&=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\binom{n}{x}p^xq^{n-x}\\&=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^xq^{n-x}\\&=(q+pe^t)^n\end{aligned}$$

方法 2 对于 n 个伯努利试验的序列,定义

$$X_j=\begin{cases}0, & \text{若在第 } j \text{ 次试验中失败}\\1, & \text{若在第 } j \text{ 次试验中成功}\end{cases}\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

则 X_j 是独立的且 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$.对于 X_j 的矩母函数,我们有

$$M_j(t)=e^{t0}q+e^{t1}p=q+pe^t\qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

则根据定理 3-9,

$$M(t)=M_1(t)M_2(t)\cdots M_n(t)=(q+pe^t)^n$$

4.8 证明二项分布的随机变量的均值和方差分别是 $\mu=np$ 和 $\sigma^2=npq$.

证明 ☞ 用习题 4.7 的方法 2 的做法.对于 $j=1,2,\cdots,n$,我们有

$$E(X_j)=0q+1p=p$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_j)&=E[(X_j-p)^2]=(0-p)^2q+(1-p)^2p\\&=p^2q+q^2p=pq(p+q)=pq\end{aligned}$$

则

$$\mu=E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=np$$

$$\sigma^2=\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)+\cdots+\mathrm{Var}(X_n)=npq$$

这里对 σ^2 我们用了定理 3-7.

以上结果,我们也可用微分矩母函数(见习题 3.38)或直接从概率函数得到.

4.9 若有缺陷的螺栓的概率是0.1,对 400 个螺栓的总数中有缺陷的螺栓数求(a)均值,(b)标准差.

解 ☞ (a)均值 $\mu = np = (400)(0.1) = 40$，即，我们能期望 40 个螺栓是有缺陷的.

(b)方差 $\sigma^2 = npq = (400)(0.1)(0.9) = 36$，因此，标准差 $\sigma = \sqrt{36} = 6$.

对于伯努利试验的大数定律

4.10 证明定理4.1，对于伯努利试验的(弱)大数定律.

证明 ☞ 根据切比雪夫的不等式，若 X 是任一个具有有限均值 μ 和方差 σ^2 的随机变量，则

(1) $$P(|X-\mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}$$

特别地，若 X 是二项或伯努利分布的随机变量，则 $\mu = np$，$\sigma = \sqrt{npq}$ 且(1)变成

(2) $$P(|X-np| \geqslant k\sqrt{npq}) \leqslant \frac{1}{k^2}$$

或

(3) $$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| \geqslant k\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \leqslant \frac{1}{k^2}$$

若我们令 $\varepsilon = k\sqrt{\frac{pq}{n}}$，(3)变成

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

该结果也直接从定理 3-19 产生，具有 $S_n = X$，$\mu = np$，$\sigma = \sqrt{npq}$.

4.11 给出在对一枚匀称的骰子逐次抛掷中，对出现 3 的(弱)大数定律的一个解释.

解 ☞ 此情形的大数定律说：n 次抛掷中 3 出现的比例与 $\frac{1}{6}$ 的差异超过某一 $\varepsilon > 0$ 值的概率，当 $n\to\infty$ 时趋于 0.

正态分布

4.12 求图 4-3 中所示的标准正态曲线下的面积. (a) $z = 0$ 与 $z = 1.2$ 之间，(b) $z = 0.68$ 与 $z = 0$ 之间，(c) $z = -0.46$ 与 $z = 2.21$ 之间，(d) $z = 0.81$ 与 $z = 1.94$ 之间，(e) $z = -1.28$ 的右边.

解 ☞ (a)利用附录 C 的表，对列记号 z 往下进行到 1.2 止，然后往右进行到列记号 0 处，结果 0.3849 就是所要求的面积且表示 $0 \leqslant Z \leqslant 1.2$ 的概率(图 4-3). 因此，

$$P(0 \leqslant Z \leqslant 1.2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{1.2} e^{-u^2/2}du = 0.3849$$



图 4-3



图 4-4

(b)要求的面积 = $z = 0$ 与 $z = +0.68$ 之间的面积(根据对称性). 因此，z 列记号进行到 0.6 止，然后往右进行到列记号 8 处.

该结果 0.2517 是所要求的面积且表示 $-0.68 \leqslant Z \leqslant 0$ 的概率(图 4.4). 因此，

$$P(-0.68 \leqslant Z \leqslant 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-0.68}^{0} e^{-u^2/2}du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{0.68} e^{-u^2/2}du = 0.2517$$

(c)要求的面积 = ($z = -0.46$ 与 $z = 0$ 之间的面积) + ($z = 0$ 与 $z = 0.46$ 之间的面积)

= ($z = 0$ 与 $z = 0.46$ 之间的面积) + ($z = 0$ 与 $z = 2.21$ 之间的面积)

$=0.1772+0.4864=0.6636$

该面积 0.6636 表示 $0.46 \leqslant Z \leqslant 2.21$ 的概率(图 4.5).因此,

$$
\begin{aligned}
P(-0.46 \leqslant Z \leqslant 2.21) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-0.46}^{2.21} e^{-u^2/2}du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-0.46}^{0} e^{-u^2/2}du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{2.21} e^{-u^2/2}du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{0.46} e^{-u^2/2}du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{2.21} e^{-u^2/2}du \\
&= 0.1772 + 0.4864 = 0.6636
\end{aligned}
$$

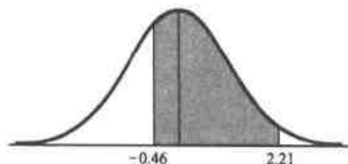


图 4-5

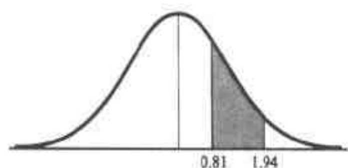


图 4-6

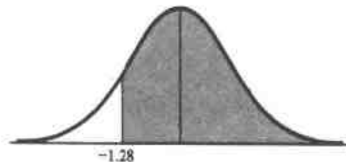


图 4-7

(d)要求的面积(图 4.6) = ($z=0$ 与 $z=1.94$ 之间的面积) − ($z=0$ 与 $z=0.81$ 之间的面积) $=0.4738-0.2910=0.1828$

这是与 $P(0.81 \leqslant Z \leqslant 1.94)$ 相同的.

(e)要求的面积(图 4.7) = ($z=-1.28$ 与 $z=0$ 之间的面积) + ($z=0$ 的右边的面积) $=0.3997+0.5=0.8997$

这是与 $P(Z \geqslant -1.28)$ 相同的.

4.13 若"面积"归于标准正态曲线之下的,求这样的 z 值(a)0 与 z 之间的面积是 0.3770, (b)z 的左边的面积是 0.8621,(c)-1.5 与 z 之间的面积是 0.0217.

解 (a) 在附录 C 的表中进入 0.3770 是位于行记号 1.1 的右边与列记号 6 之下,则要求的 $z=1.16$.

根据对称性,$z=-1.16$ 是 z 的另一个值.因此,$z=\pm 1.16$(图 4.8),该问题等价于对于 z 解方程

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{z} e^{-u^2/2}du = 0.3770$$

(b)由于面积大于 0.5, 所以 z 必须是正的,0 与 z 之间的面积是 $0.8621-0.5=0.3621$, 从而 $z=1.09$(图 4-9).

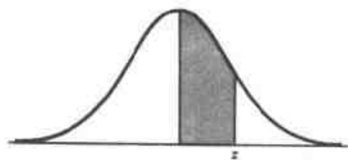


图 4-8

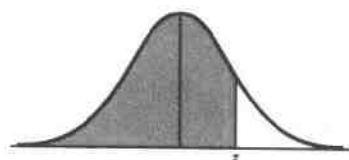


图 4-9

(c)若 z 是正的,则面积要大于 -1.5 与 0 之间的面积,该面积是 0.4332;因此 z 必是负的.

情形 1 z 是负的,它在 -1.5 的右边(图 4-10).

$$-1.5 \text{ 与 } z \text{ 之间的面积} = (-1.5 \text{ 与 } 0 \text{ 之间的面积}) - (0 \text{ 与 } z \text{ 之间的面积})$$

$$0.0217 = 0.4332 - (0 \text{ 与 } z \text{ 之间的面积})$$

则 0 与 z 之间的面积是 $0.4332-0.0217=0.4115$,从而 $z=-1.35$.

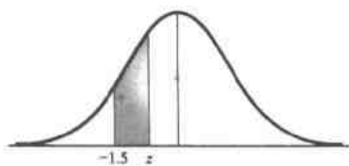


图 4-10

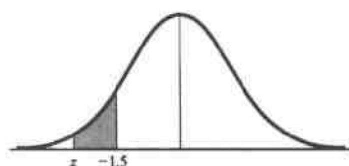


图 4-11

情形 2　z 是负的，它在 -1.5 的左边(图 4-11).

$$z \text{ 与 } -1.5 \text{ 之间的面积} = (z \text{ 与 } 0 \text{ 之间的面积}) - (-1.5 \text{ 与 } 0 \text{ 之间的面积})$$

$$0.0217 = (z \text{ 与 } 0 \text{ 之间的面积}) - 0.4332$$

则 0 与 z 之间的面积是 $0.0217+0.4332=0.4549$ 且用线性插值法，$z=-1.694$，或 $z=-1.69$.

4.14　某学院的500名男学生的平均体重是151磅，标准差是 15 磅，假设体重是正态分布的，求有多少学生体重在(a)120 与 155 磅之间，(b)超过 185 磅.

解　(a)在 120 与 155 磅之间的体重记录实际上可能是 119.5 到 155.5 磅之间的任一值，假设他们是最接近的磅记录(图 4-12)：

$$119.5 \text{ 磅的标准单位} = (119.5-151)/15 = -2.10$$

$$155.5 \text{ 磅的标准单位} = (155.5-151)/15 = 0.30$$

要求学生的比例 $=(z=-2.10 \text{ 与 } z=0.30 \text{ 之间的面积})$

$=(z=-2.10 \text{ 与 } z=0 \text{ 之间的面积})+(z=0 \text{ 与 } z=0.30 \text{ 之间的面积})$

$=0.4821+0.1179=0.6000$

则体重在 120 与 155 磅之间的学生数是 $500\times0.6000=300$.

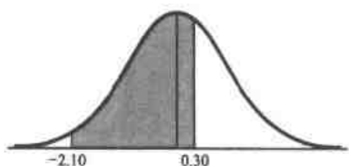


图 4-12

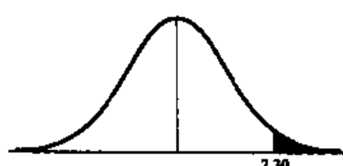


图 4-13

(b)学生体重超过 185 磅必至少体重为 185.5 磅(图 4-13).

$185.5 \text{ 磅的标准单位} = (185.5-151)/15 = 2.30$

要求学生的比例 $=(z=2.30 \text{ 的右边的面积})$

$=(z=0 \text{ 的右边的面积})-(z=0 \text{ 与 } z=2.30 \text{ 之间的面积})$

$=0.5-0.4893=0.0107$

则体重超过 185 磅的学生数是 $500(0.0107)=5$.

若 W 表示随机地选择一个学生的体重，我们可以将以上结果用概率的词句写成

$$P(119.5\leqslant W\leqslant 155.5)=0.6000,\quad P(W\geqslant 185.5)=0.0107$$

4.15　用机器生产的 200 个垫圈的样品的平均内直径是 0.502 寸且标准差是 0.005 寸，为了检查这些垫圈的效果，规定直径的最大容许界限是从 0.496 到 0.508 寸，否则垫圈就认为是有缺陷的.

解　确定用机器生产的有缺陷的垫圈的百分率，假设直径是服从正态分布：

$$0.496 \text{ 的标准单位} = (0.496-0.502)/0.005 = -1.2$$

$$0.508 \text{ 的标准单位} = (0.508-0.502)/0.005 = 1.2$$

无缺陷的垫圈的比例 $=(\text{正态曲线下在 } z=-1.2 \text{ 与 } z=1.2 \text{ 之间的面积})$

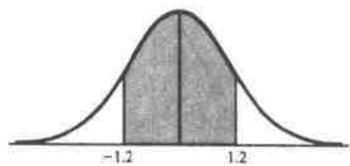


图 4-14

$= (z=0$ 与 $z=1.2$ 之间面积的 2 倍)

$= 2(0.3849) = 0.7698$，或 77%

因此，有缺陷的垫圈的百分率是 $100\% - 77\% = 23\%$（图 4-14）.

注意，如果认为区间 0.496 到 0.508 寸，实际的直径是从 0.4955 到 0.5085 寸，则上面的结果要稍加修正．然而上述两个重要数字基本不变．

4.16 求对于一般的正态分布的矩母函数．

解 ☞ 我们有

$$M(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}dx$$

在积分中，令 $(x-\mu)\sigma = v$，因此 $x = \mu + \sigma v$，$dx = \sigma dv$，我们有

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu t + \sigma v t - (v^2/2)}dv = \frac{e^{\mu t + (\sigma^2 t^2/2)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(v-\sigma t)^2/2}dv$$

现在令 $v - \sigma t = w$，我们求得

$$M(t) = e^{\mu t + (\sigma^2 t^2/2)}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2/2}dw\right) = e^{\mu t + (\sigma^2 t^2/2)}$$

对二项分布的正态近似

4.17 求 10 次抛掷一枚匀称的硬币，得到 3 与 6 之间正面数的概率，利用(a)二项分布，(b)对二项分布的正态近似．

解 ☞ (a)令 X 是在 10 次抛掷中出现正面次数的随机变量(图 4-15)，则

$$P(X=3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{15}{128},\quad P(X=4) = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{105}{512}$$

$$P(X=5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{63}{256},\quad P(X=6) = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{105}{512}$$

则要求的概率是

$$P(3 \leqslant X \leqslant 6) = \frac{15}{128} + \frac{105}{512} + \frac{63}{256} + \frac{105}{512} = \frac{99}{128} = 0.7734$$

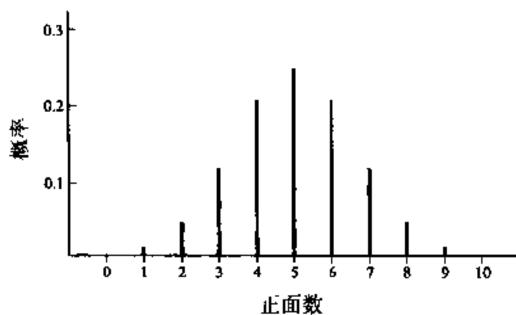


图 4-15

(b)在图 4-15 和 4-16 中，从几何上描绘出 10 次抛掷该硬币出现正面数的概率分布，这里把图 4-16 当作数据对待，似乎它们是连续的．要求的概率是图 4-16 中阴影矩形面积之和，且用对应的正态曲线截下的面积来近似．当连续时以数据对待，随之 3 到 6 正面数可考虑作 2.5 到 6.5 正面数，对于二项分布的均值和方差也可由 $\mu = np = 10\left(\frac{1}{2}\right) = 5$ 和 $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(10)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 1.58$ 给出．现在

$$2.5\text{的标准单位} = \frac{2.5-2}{1.58} = -1.58$$

$$6.5\text{ 的标准单位}=\frac{6.5-5}{1.58}=0.95$$

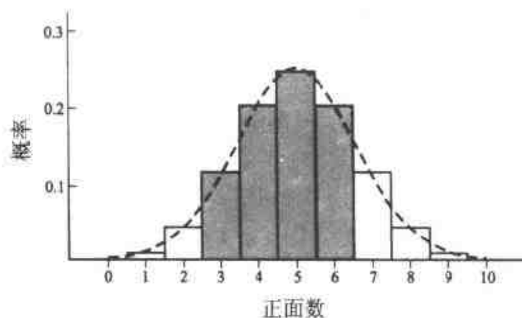


图 4-16

要求的概率(图 4-17) = ($z=-1.58$ 与 $z=0.95$ 之间的面积)
= ($z=-1.58$ 与 $z=0$ 之间的面积)
+ ($z=0$ 与 $z=0.95$ 之间的面积)
= 0.4429 + 0.3289 = 0.7718

它与在(a)中所得到的 0.7734 作比较是很好的，其精确度对比较大的 n 值甚至更好.

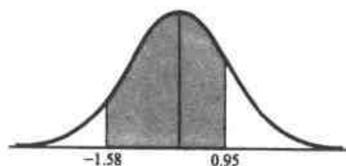


图 4-17

4.18 抛掷一枚匀称的硬币 500 次，求正面数与 250 相差(a)不超过 10 的概率和(b)不超过 30 的概率.

解 ☞ $\mu=np=500\times\frac{1}{2}=250,\quad \sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{500\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=11.18$

(a)我们要求的是正面数在 240 与 260 之间的概率，或做连续修正，认为数据在 239.5 与 260.5 之间.

$$239.5\text{ 的标准单位}=\frac{239.5-250}{11.18}=-0.94,\quad 260.5\text{ 的标准单位}=0.94$$

要求的概率 =(正态曲线下 $z=-0.94$ 与 $z=0.94$ 之间的面积)
=($z=0$ 与 $z=0.94$ 之间面积的 2 倍) = $2\times0.3264=0.6528$

(b)我们要求的是正面数在 220 与 280 之间的概率，或做连续修正，认为数据在 219.5 与 280.5 之间.

$$219.5\text{ 的标准单位}=\frac{219.5-250}{11.18}=-2.73,\quad 280.5\text{ 的标准单位}=2.73$$

要求的概率 =($z=0$ 与 $z=2.73$ 之间的正态曲线下的面积的 2 倍)
$=2\times0.4968=0.9936$

这样我们可以确信正面数与期望的 250 相差不超过 30. 因此，若正面数实际上是 280，那我们相信该硬币是不匀称的，即它是加过工的.

4.19 抛掷一枚骰子 120 次，求 4 朝上的次数为(a)18 次或少于 18 次，(b)小于或等于 14 次的概率.

解 ☞ 假设该骰子是匀称的. 4 朝上的概率 $p=\frac{1}{6}$，而不朝上的概率 $q=\frac{5}{6}$.

(a)我们要求 4 在 0 与 18 次之间朝上的概率，这由下式精确地给出

$$\binom{120}{18}\left(\frac{1}{2}\right)^{18}\left(\frac{5}{6}\right)^{102}+\binom{120}{17}\left(\frac{1}{6}\right)^{17}\left(\frac{5}{6}\right)^{103}+\cdots+\binom{120}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{120}$$

但是由于计算中的量是极大的，我们用正态近似.

当连续时，就认为 4 朝上的数据是从 −0.5 到 18.5.

同样，

$$\mu=np=120\times\frac{1}{6}=20,\quad \sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{120\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}=4.08$$

则

$$-0.5\text{ 的标准单位}=\frac{-0.5-20}{4.08}=-5.02,\quad 18.5\text{ 的标准单位}=-0.37$$

要求的概率 = (正态曲线下 $z=-5.02$ 与 $z=-0.37$ 之间的面积)

$= (z = 0 与 z = -5.02 之间的面积) - (z = 0 与 z = -0.37 之间的面积)$

$= 0.5 - 0.1443 = 0.3557$

(b)我们对(a)中所计算的,用 14 代替 18,则

$$-0.5 \text{ 的标准单位} = 5.02, \quad 14.5 \text{ 标准单位} = \frac{14.5 - 20}{4.08} = -1.35$$

要求的概率 = (正态曲线下 $z = -5.02$ 与 $z = -1.35$ 之间的面积)

$= (z = 0 与 z = -5.02 之间的面积) - (z = 0 与 z = -1.35 之间的面积)$

$= 0.5 - 0.4115 = 0.0885$

这就是说,对掷一枚骰子 120 次重复进行,则 4 朝上次数小于或等于 14 的情形,大约占十分之一.

泊松(Poisson)分布

4.20 说明用泊松近似二项分布的有效性.

解 ☞ 若 X 是二项分布的随机变量,则

(1) $$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

这里 $E(X) = np$. 令 $\lambda = np$, 因此 $p = \lambda / n$, 则(1)变成

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{x!\,n^x}\lambda^x\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{x-1}{n}\right)}{x!}\lambda^x\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

现在当 $n \to \infty$ 时

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \to 1$$

而

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \to (e^{-\lambda})(1) = e^{-\lambda}$$

利用微积分学中的著名结果

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n = e^u$$

这样当 $n \to \infty$ 而 λ 固定不动(有, $p \to 0$)时

(2) $$P(X = x) \to \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

它就是泊松分布.

另解 对于二项分布的矩母函数是

(3) $$(q + pe^t)^n = (1 - p + pe^t)^n = [1 + p(e^t - 1)]^n$$

若 $\lambda = np$, 因此 $p = \lambda / n$, 这变成

(4) $$\left[1 + \frac{\lambda(e^t - 1)}{n}\right]^n$$

当 $n \to \infty$ 这趋于

(5) $$e^{\lambda(e^t - 1)}$$

它是泊松分布的矩母函数.

4.21 证明习题 4.20 中的极限函数(2)实际上是概率函数.

证明 ☞ 首先,我们知道 $P(X = x) > 0$, $x = 0, 1, \cdots$, $\lambda > 0$. 第二,我们有

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

这就完成了证明.

4.22　在某一生产过程中,生产的工具10%是有缺陷的.求随机地选择10个工具的样本中有2个有缺陷的概率.利用(a)二项分布,(b)对二项分布的泊松近似.

解　(a)有缺陷的工具的概率是 $p=0.1$,令 X 表示所选择的10个工具中有缺陷的个数.则按照二项分布

$$P(X=2)=\binom{10}{2}(0.1)^2\times(0.9)^2=0.1937\text{ 或 }0.19$$

(b)我们有 $\lambda=np=10\times0.1=1$,则按照泊松分布,

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\text{ 或 }P(X=2)=\frac{(1)^2e^{-1}}{2!}=0.1839\text{ 或 }0.18$$

一般地,若 $p\leqslant0.1$ 和 $\lambda=np\leqslant5$,该近似是好的.

4.23　若一个体在注射血清中忍受不良反应的概率是0.001,确定2000个体中的(a)3个,(b)多于2个,有不良反应的概率.

解　令 X 表示忍受不良反应的个体数,X 是伯努利分布的随机变量,由于假设不良反应是稀少的事件,所以我们可假设 X 是服从泊松分布的,即

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\qquad\text{这里 }\lambda=np=2000\times0.001=2$$

(a)
$$P(X=3)=\frac{2^3e^{-2}}{3!}=0.180$$

(b)
$$\begin{aligned}P(X>2)&=1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)]\\&=1-\left[\frac{2^0e^{-2}}{0!}+\frac{2^1e^{-2}}{1!}+\frac{2^2e^{-2}}{2!}\right]\\&=1-5e^{-2}=0.323\end{aligned}$$

利用二项分布的概率的精确评价要花更多的劳动.

中心极限定理

4.24　证明对服从二项分布的随机变量 X 的中心极限定理,从而建立用正态近似二项分布的有效性.

解　对 X 的标准化的变量是 $X^*=(X-np)/\sqrt{npq}$,X^* 的矩母函数是

$$\begin{aligned}E(e^{tX^*})&=E(e^{t(X-np)/\sqrt{npq}})\\&=e^{-tnp/\sqrt{npq}}E(e^{tX/\sqrt{npq}})\\&=e^{-tnp/\sqrt{npq}}\sum_{x=0}^{n}e^{tx/\sqrt{npq}}\binom{n}{x}p^xq^{n-x}\\&=e^{-tnp/\sqrt{npq}}\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^{t/\sqrt{npq}})^xq^{n-x}\\&=e^{-tnp/\sqrt{npq}}(q+pe^{t/\sqrt{npq}})^n\\&=[e^{-tp/\sqrt{npq}}(q+pe^{t/\sqrt{npq}})]^n\\&=(qe^{-tp/\sqrt{npq}}+pe^{tq/\sqrt{npq}})^n\end{aligned}$$

利用表示式

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\cdots$$

我们求得

$$\begin{aligned}qe^{-tp/\sqrt{npq}}+pe^{tq/\sqrt{npq}}&=q\left(1-\frac{tp}{\sqrt{npq}}+\frac{t^2p^2}{2npq}+\cdots\right)+p\left(1+\frac{tq}{\sqrt{npq}}+\frac{t^2q^2}{2npq}+\cdots\right)\\&=q+p+\frac{pq(p+q)t^2}{2npq}+\cdots\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{t^2}{2n} + \cdots$$

因此，

$$E(e^{tX^*}) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \cdots\right)^n$$

当 $n \to \infty$ 时，上式右边趋于 $e^{t^2/2}$，它是标准正态分布的矩母函数．因此，根据定理 4-3 就有要求的结果．

4.25 证明中心极限定理(定理 4-2)．

证明 ☞ 对于 $n = 1, 2, \cdots$，我们有 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$．现在每个 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都有均值 μ 和方差 σ^2．于是

$$E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n\mu$$

且由于 X_k 是独立的

$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + V(X_n) = n\sigma^2$$

这样标准化的随机变量对应于 S_n 的是

$$S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

S_n^* 的矩母函数是

$$\begin{aligned} E(e^{tS_n^*}) &= E[e^{t(S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n}}] \\ &= E[e^{t(X_1-\mu)/\sigma\sqrt{n}} e^{t(X_2-\mu)/\sigma\sqrt{n}} \cdots e^{t(X_n-\mu)/\sigma\sqrt{n}}] \\ &= E[e^{t(X_1-\mu)/\sigma\sqrt{n}}] \cdot E[e^{t(X_2-\mu)/\sigma\sqrt{n}}] \cdots E[e^{t(X_n-\mu)/\sigma\sqrt{n}}] \\ &= \{E[e^{t(X_1-\mu)/\sigma\sqrt{n}}]\}^n \end{aligned}$$

这里，在最后两步中，我们分别利用了 X_k 是独立同分布的．现在，由泰勒级数表示式

$$\begin{aligned} E[e^{t(X_1-\mu)/\sigma\sqrt{n}}] &= E\left[1 + \frac{t(X_1-\mu)}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{t^2(X_1-\mu)^2}{2\sigma^2 n} + \cdots\right] \\ &= E(1) + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}E(X_1 - \mu) + \frac{t^2}{2\sigma^2 n}E[(X_1-\mu)^2] + \cdots \\ &= 1 + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(0) + \frac{t^2}{2\sigma^2 n}(\sigma^2) + \cdots = 1 + \frac{t^2}{2n} + \cdots \end{aligned}$$

因此

$$E(e^{tS_n^*}) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \cdots\right)^n$$

当 $n \to \infty$ 时，这式的极限是 $e^{t^2/2}$，它就是标准化正态分布的矩母函数．因此，根据定理 3-10，就得到所要求的结果．

多项分布

4.26 盒子里含有 5 个红球，4 个白球和 3 个蓝球，从盒子里随机地挑选一个球，记下它的颜色，然后放回盒里．求用这种方式挑选 6 个球是 3 红，2 白，1 蓝的概率．

解 ☞ **方法 1**(根据公式)

$$P(\text{任抽一个是红的}) = \frac{5}{12},\quad P(\text{任抽一个是白的}) = \frac{4}{12}$$

$$P(\text{任抽一个是蓝的}) = \frac{3}{12}$$

则

$$P(3\text{红}, 2\text{白}, 1\text{蓝}) = \frac{6!}{3!2!1!}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{4}{12}\right)^2\left(\frac{3}{12}\right)^1 = \frac{625}{5\,184}$$

方法 2 选择任一红球的概率是5/12，则选择 3 个红球的概率是$(5/12)^3$，类似地，选择 2 个白球的概率是$(4/12)^2$，选择 1 个蓝球的概率是$(3/12)^1$．因此，按次序选择 3 红，2 白和 1 蓝的概率是

$$\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{4}{12}\right)^2\left(\frac{3}{12}\right)^1$$

同样的选择按各种其他的顺序可以完成,这些不同次序的数是

$$\frac{6!}{3!2!1!}$$

则要求的概率是

$$\frac{6!}{3!2!1!}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{4}{12}\right)^2\left(\frac{3}{12}\right)^1$$

方法3　所求概率是$(p_r+p_w+p_b)^6$的多项表达式中的项$p_r^3p_w^2p_b$,这里$p_r=\frac{5}{12}, p_w=\frac{4}{12}, p_b=\frac{3}{12}$.根据实际的表示式,就得到上面的结果.

超几何分布

4.27　盒子里含有6个蓝弹子和4个红弹子,在一个实验中,随机地挑选一个弹子,观察它的颜色后不放回盒里,求做5次试验选中3个蓝弹子的概率.

解答　**方法1**　按不同的上述路子从6个蓝弹子选择3个蓝弹子的路子数是$\binom{6}{3}$.从4个红弹子选择剩下的2个弹子的不同的路子数是$\binom{4}{2}$.因此,包含3个蓝弹子和2个红弹子的不同的样本数是$\binom{6}{3}\binom{4}{2}$.

现在从含10个弹子的盒里选择5个弹子的不同路子的总数是$\binom{10}{5}$.因此,要求的概率由下式给出:

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{4}{2}}{\binom{10}{5}}=\frac{10}{21}$$

方法2(利用公式)　我们有$b=6, r=4, n=5, x=3$.则根据(19)式,要求的概率是

$$P(X=3)=\frac{\binom{6}{3}\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}$$

均匀分布

4.28　描述均匀分布的均值和方差分别由下式给出(a)$\mu=\frac{1}{2}(a+b)$,(b)$\sigma^2=\frac{1}{12}(b-a)^2$.

解答　(a)

$$\mu=E(X)=\int_a^b\frac{xdx}{b-a}=\left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

(b)我们有

$$E(X^2)=\int_a^b\frac{x^2dx}{b-a}=\left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

则方差由下式给出:

$$\sigma^2=E[(X-\mu)^2]=E(X^2)-\mu^2$$
$$=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{12}(b-a)^2$$

柯西分布

4.29　描述(a)对柯西分布的随机变量X的矩母函数不存在,但是(b)特征函数存在.

解答　(a)X的矩母函数是

$$E(e^{tX})=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{tx}}{x^2+a^2}dx$$

若t是实数,它不存在.这可从下述注释看出,例如,若$x\geqslant0, t>0$,则

$$e^{tx}=1+tx+\frac{t^2x^2}{2!}+\cdots>\frac{t^2x^2}{2}$$

因此

$$\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{tx}}{x^2+a^2}dx \geqslant \frac{at^2}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^2+a^2}dx$$

并且右边的积分发散.

(b)X 的特征函数是

$$\begin{aligned}E(e^{i\omega X}) &= \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega x}}{x^2+a^2}dx \\ &= \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{x^2+a^2}dx + \frac{ai}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega x}{x^2+a^2}dx \\ &= \frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{x^2+a^2}dx\end{aligned}$$

这里我们分别利用了被积函数是奇函数和偶函数的积分性质. 最后的积分是存在的, 并且等于 $e^{-a\omega}$.

4.30　令 Θ 是在区间 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\Theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上的均匀分布的随机变量. 证明 $X=a\tan\Theta$, $a>0$, 是在 $-\infty<x<\infty$ 上柯西分布的随机变量.

证明 ☞ Θ 的密度函数是

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi}, \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

考虑变换 $x=a\tan\theta$, 我们有

$$\theta = \arctan\frac{x}{a} \text{ 和 } \frac{d\theta}{dx} = \frac{a}{x^2+a^2} > 0$$

则根据定理 2-3, X 的密度函数由下式给出:

$$g(x) = f(\theta)\left|\frac{d\theta}{dx}\right| = \frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2+a^2}$$

它是柯西分布.

伽马(Gamma)分布

4.31　描述伽马分布的均值和方差由下式给出:

(a)$\mu=\alpha\beta$, (b)$\sigma^2=\alpha\beta^2$.

解 ☞ (a)

$$\mu = \int_0^{\infty}x\left[\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\right]dx = \int_0^{\infty}\frac{x^\alpha e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}dx$$

令 $x/\beta=t$, 我们有

$$\mu = \frac{\beta^\alpha\beta}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^\alpha e^{-t}dt = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+1) = \alpha\beta$$

(b)

$$E(X^2) = \int_0^{\infty}x^2\left[\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\right]dx = \int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha+1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}dx$$

令 $x/\beta=t$, 我们有

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \frac{\beta^{\alpha+1}\beta}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha+1}e^{-t}dt \\ &= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2) = \beta^2(\alpha+1)\alpha\end{aligned}$$

由于 $\Gamma(\alpha+2)=(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)=(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)$. 因此,

$$\sigma^2 = E(X^2)-\mu^2 = \beta^2(\alpha+1)\alpha-(\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2$$

贝塔(Beta)分布

4.32　求贝塔分布的均值.

解 ☞

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x[x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}]dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^\alpha(1-x)^{\beta-1}dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)}\end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

4.33　求贝塔分布的方差.

解　2阶原点矩是

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^2[x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}]dx$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}dx$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+2+\beta)}$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}$$
$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

则利用习题4.32,方差是

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

卡方分布

4.34　描述具有 ν 个自由度的卡方分布的随机变量 X 的矩母函数是 $M(t)=(1-2t)^{-\nu/2}$.

解

$$M(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\int_0^\infty e^{tx}x^{(\nu-2)/2}e^{-x/2}dx$$
$$= \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\int_0^\infty x^{(\nu-2)/2}e^{-(1-2t)x/2}dx$$

令 $(1-2t)x/2=u$,我们求得

$$M(t) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\int_0^\infty\left(\frac{2u}{1-2t}\right)^{(\nu-2)/2}e^{-u}\frac{2du}{1-2t}$$
$$= \frac{(1-2t)^{-\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)}\int_0^\infty u^{(\nu/2)-1}e^{-u}du = (1-2t)^{-\nu/2}$$

4.35　令 X_1 和 X_2 是分别具有 ν_1 和 ν_2 个自由度的卡方分布的独立的随机变量.(a)描述 $Z=X_1+X_2$ 的矩母函数是 $(1-2t)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}$,从而(b)描述 Z 是具有 $\nu_1+\nu_2$ 个自由度的卡方分布的随机变量.

解　(a) $Z=X_1+X_2$ 的矩母函数是

$$M(t) = E[e^{t(X_1+X_2)}] = E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) = (1-2t)^{-\nu_1/2}(1-2t)^{-\nu_2/2} = (1-2t)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}$$

利用习题4.34.

(b)由习题4.34知道,其矩母函数是 $(1-2t)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}$ 的分布是具有 $\nu_1+\nu_2$ 个自由度的卡方分布,根据定理3-10这必是 Z 的分布.

根据上述一般化的结果,我们得到定理4-4的一个证明.

4.36　令 X 是均值为0和方差为1的正态分布的随机变量.描述 X^2 是具有1个自由度的卡方分布的随机变量.

解　我们要求 X 为已知标准正态分布时,$Y=X^2$ 的分布.由于 X 与 Y 之间不是一一对应的,我们不能应用定理2-3,要它继续有效就必须进行以下工作.

对于 $y<0$,显然 $P(Y\leqslant y)=0$,对于 $y\geqslant 0$,我们有

$$P(Y\leqslant y) = P(X^2\leqslant y) = P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant +\sqrt{y})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}}e^{-x^2/2}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\sqrt{y}}e^{-x^2/2}dx$$

这里最后一步利用了标准正态密度函数是偶函数的积分结果.在最后的积分里作变量替换 $x=+\sqrt{t}$,我们得到

$$P(Y\leqslant y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^y t^{-1/2}e^{-t/2}dt$$

这是具有 1 个自由度的卡方分布,跟在(39)式令 $\nu=1$ 的结果一样,并且用了 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

4.37 对于 $\nu=2$ 证明定理 4-3.

证明 ☞ 根据习题 4.36,我们知道若 X_1 和 X_2 都是均值为 0 和方差为 1 的正态分布的随机变量,则 X_1^2 和 X_2^2 都是具有 1 个自由度的卡方分布.则从习题 4.35(b),若 X_1 和 X_2 是独立的,我们知道 $Z=X_1^2+X_2^2$ 是具有 $1+1=2$ 个自由度的卡方分布的随机变量.随之,用同样的方式可得对于所有正整数 ν 的一般结果.

4.38 在图 4-18 里描绘出具有 5 个自由度的卡方分布的图形.对以下情形求 χ_1^2,χ_2^2 的值.

(a)在右边的阴影的面积 = 0.05,

(b)总阴影的面积 = 0.05,

(c)在左边的阴影面积 = 0.10,

(d)在右边的阴影面积 = 0.01.



图 4-18

解 ☞ (a)若在右边的阴影面积是 0.05,则对 χ_2^2 的左边的面积是 $(1-0.05)=0.95$,且 χ_2^2 是 95% 百分位数 $\chi_{0.95}^2$.

参考附录 E 中的表,在列表头为 ν 的列向下到 5 处,再向右到列表头为 $\chi_{0.95}^2$ 列处,得到 11.1 就是所要求的 χ^2 值.

(b)由于分布不是对称的,存在许多值使阴影部分的总面积为 0.05.例如,右边阴影面积可以是 0.04,同时左边阴影面积是 0.01.然而,若不加特别说明,习惯上选择两块面积相等,这时每一块面积是 0.025.

如果右侧阴影面积为 0.025,那么 χ_2^2 左侧的面积是 $1-0.025=0.975$,χ_2^2 是 97.5 百分位数 $\chi_{0.975}^2$,从附表 E 查出为 12.8.

类似地,左侧阴影的面积是 0.025,χ_1^2 左侧面积为 0.025,χ_1^2 是 2.5 百分位数 $\chi_{0.025}^2$,它等于 0.831.

因此所求值为 0.831 和 12.8.

(c)若左侧阴影面积是 0.10,χ_1^2 是 10 百分位数,它等于 1.61.

(d)若右侧阴影面积是 0.01,χ_2^2 左侧的面积是 0.99,χ_2^2 是 99 百分位数 $\chi_{0.99}^2$,它等于 15.1.

4.39 如果自由度 ν 等于(a)15,(b)21,(c)50,求 χ^2 的值,使 χ^2 分布右侧尾部的面积为 0.05.

解 ☞ 使用附表 E,在列表头为 $\chi_{0.95}^2$ 的列中,(a)$\nu=15$ 对应的值为 25.0,(b)$\nu=21$ 对应的值为 32.7,(c)$\nu=50$ 对应的值为 67.5.

4.40 对应自由度为(a)9,(b)28,(c)40,求 χ^2 的中位数值.

解 ☞ 使用附表 E,在列表头为 $\chi_{0.50}^2$ 的列中(因为中位数是 50 百分位数),(a)$\nu=9$ 对应的值为 8.34,(b)$\nu=28$ 对应的值为 27.3,(c)$\nu=40$ 对应的值为 39.3.

注意一个有趣的情况,中位数的值与自由度数非常接近.事实上,从表中可以看到,当 $\nu>10$ 时,中位数的值等于 $\nu-0.7$.

4.41 对自由度(a)$\nu=50$,(b)$\nu=100$ 求 $\chi_{0.95}^2$.

解 ☞ 当 ν 大于 30 时,可使用下列事实:$(\sqrt{2\chi^2}-\sqrt{2\nu-1})$ 是非常接近均值为 0 而方差为 1 的正态分布.那么,如果 Z_p 是标准正态分布的 $100p$ 百分位数,我们可以高度近似地写出:

$$\sqrt{2\chi_p^2}-\sqrt{2\nu-1}=Z_p \text{ 或 } \sqrt{2\chi_p^2}=Z_p+\sqrt{2\nu-1}$$

由此

$$\chi_p^2=\frac{1}{2}(Z_p+\sqrt{2\nu-1})^2$$

(a)若 $\nu=50$,$\chi_{0.95}^2=\frac{1}{2}(Z_{0.95}+\sqrt{2(50)-1})^2=\frac{1}{2}(1.64+\sqrt{99})^2=69.2$,该值与附表 E 中给出的值

67.5 吻合得很好.

(b)若 $\nu=100$, $\chi^2_{0.95}=\frac{1}{2}(Z_{0.95}+\sqrt{2(100)-1})^2=\frac{1}{2}(1.64+\sqrt{199})^2=124.0$(真实值为 124.3).

学生氏 t 分布

4.42　证明定理 4-6.

证明　☞ Y 是均值为 0 和方差为 1 的正态分布,它的密度函数是

(1)
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$$

Z 是具有 ν 个自由度的卡方分布的随机变量,它的密度函数是

(2)
$$\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}z^{(\nu/2)-1}e^{-z/2},\quad z>0$$

因为 Y 与 Z 是独立的,它们的联合密度函数是(1)与(2)的乘积,即

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}z^{(\nu/2)-1}e^{-(y^2+z)/2}$$

对 $-\infty<y<+\infty, z>0, T=Y/\sqrt{Z/\nu}$ 的分布函数是

$$F(x)=P(T\leqslant x)=P(Y\leqslant x\sqrt{Z/\nu})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\iint_{\mathscr{R}}z^{(\nu/2)-1}e^{-(y^2+z)/2}dy\,dz$$

这里积分取遍 yz 平面的区域 $\mathscr{R}$,它满足 $y\leqslant x\sqrt{z/\nu}$. 我们先固定 z,对 y 从 $-\infty$ 到 $x\sqrt{z/\nu}$ 积分,然后我们对 z 从 0 到 ∞ 积分,因此,我们有

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\int_{z=0}^{\infty}z^{(\nu/2)-1}e^{-z/2}\left[\int_{y=-\infty}^{x\sqrt{z/\nu}}e^{-y^2/2}dy\right]dz$$

在方括号的积分里,令 $y=u\sqrt{z/\nu}$,我们求得

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\int_{z=0}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{x}z^{(\nu/2)-1}e^{-z/2}\sqrt{z/\nu}e^{-u^2z/2\nu}du\,dz$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\int_{u=-\infty}^{x}\left[\int_{z=0}^{\infty}z^{(\nu-1)/2}e^{-(z/2)[1+(u^2/\nu)]}dz\right]du$$

令 $W=\frac{z}{2}\left(1+\frac{u^2}{\nu}\right)$,则积分写成

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\cdot 2^{(\nu+1)/2}\int_{u=-\infty}^{x}\left[\int_{w=0}^{\infty}\frac{w^{(\nu-1)/2}e^{-w}}{(1+u^2/\nu)^{(\nu+1)/2}}dw\right]du$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_{u=-\infty}^{x}\frac{du}{(1+u^2/\nu)^{(\nu+1)/2}}$$

证毕.

4.43　在图 4-19 里描绘出具有 9 个自由度的学生氏 t 分布的图形,对以下各情形求 t_1 的值.

(a)在右边的阴影面积 = 0.05,

(b)总阴影面积 = 0.05,

(c)总非阴影面积 = 0.99,

(d)在左边的阴影面积 = 0.01,

(e)t_1 左边的区域面积是 0.90.

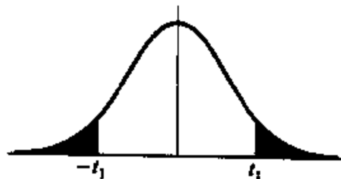


图 4-19

解　☞ (a)如果右侧阴影面积是 0.05,那么 t_1 左侧区域的面积是 $(1-0.05)=0.95$, t_1 是 95 百分位数 $t_{0.95}$.

根据附表 D,在列表头 ν 的列向下到 9 处,在向右到列表头 $t_{0.95}$ 的列,得所求 t_1 为 1.83.

(b)如果总的阴影面积是 0.05,由对称性,右侧阴影面积是 0.025. 因此, t_1 左侧区域面积为 $(1-0.025)=0.975$, t_1 是 97.5 百分位数 $t_{0.975}$,从附表 D,发现 t_1 的值为 2.26.

(c)如果总的非阴影面积是0.99,那么总的阴影面积是$(1-0.99)=0.01$,右侧阴影面积是$0.01/2=0.005$,从表中可求得$t_{0.995}=3.25$.

(d)如果左侧阴影面积为0.01,那么按对称性,右侧阴影面积也为0.01,从表中可得$t_{0.99}=2.82$.因此,使其左侧阴影面积为0.01的t值是-2.82.

(e)如果t_1左侧区域面积为0.90,那么t_1对应到90百分位数$t_{0.90}$,从表中得它等于1.38.

4.44 若自由度ν等于(a)16,(b)27,(c)200,求使t分布右侧尾部面积为0.05的t值.

解 ☞ 参考附表D,找到列表头为$t_{0.95}$的列,(a)$\nu=16$对应的值为1.75,(b)$\nu=27$对应的值为1.70,(c)$\nu=200$对应的值为1.645.(最后一个值能使用正态曲线发现,在附表D中,该值对应到最后一行标为∞的指示处).

F 分布

4.45 证明定理4-7.

证明 ☞ V_1和V_2的联合密度函数由下式给出:

$$f(v_1,v_2)=\left(\frac{1}{2^{\nu_1/2}\Gamma(\nu_1/2)}v_1^{(\nu_1/2)-1}e^{-v_1/2}\right)\left(\frac{1}{2^{\nu_2/2}\Gamma(\nu_2/2)}v_2^{(\nu_2/2)-1}e^{-v_2/2}\right)$$
$$=\frac{1}{2^{(\nu_1+\nu_2)/2}\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)}v_1^{(\nu_1/2)-1}v_2^{(\nu_2/2)-1}e^{-(v_1+v_2)/2}$$

若$v_1>0,v_2>0$,否则$f(v_1,v_2)=0$,作变换

$$u=\frac{v_1/\nu_1}{v_2/\nu_2}=\frac{\nu_2v_1}{\nu_1v_2},\quad w=v_2\quad 或\quad v_1=\frac{\nu_1uw}{\nu_2}\quad v_2=w$$

则雅可比行列式是

$$\frac{\partial(v_1,v_2)}{\partial(u,w)}=\begin{vmatrix}\partial v_1/\partial u & \partial v_1/\partial w\\ \partial v_2/\partial u & \partial v_2/\partial w\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\nu_1w/\nu_2 & \nu_1u/\nu_2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{\nu_1w}{\nu_2}$$

用$g(u,w)$表示u和w的密度函数,于是我们有

$$g(u,w)=\frac{1}{2^{(\nu_1+\nu_2)/2}\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)}\left(\frac{\nu_1uw}{\nu_2}\right)^{(\nu_1/2)-1}w^{(\nu_2/2)-1}e^{-[1+(\nu_1u/\nu_2)](w/2)}\frac{\nu_1w}{\nu_2}$$

若$u>0,w>0$,否则它等于0.

现在U的密度函数(边缘的)可由w从0到∞的积分求得,即若$u>0$,

$$h(u)=\frac{(\nu_1/\nu_2)^{\nu_1/2}u^{(\nu_1/2)-1}}{2^{(\nu_1+\nu_2)/2}\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)}\int_0^\infty w^{[(\nu_1+\nu_2)/2]-1}e^{-[1+(\nu_1u/\nu_2)](w/2)}dw$$

而若$u\leqslant0$时,$h(u)=0$,但是从附录A15,

$$\int_0^\infty w^{p-1}e^{-aw}dw=\frac{\Gamma(p)}{a^p}$$

因此,我们有,若$u>0$,

$$h(u)=\frac{(\nu_1\nu_2)^{\nu_1/2}u^{(\nu_1/2)-1}\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{2^{(\nu_1+\nu_2)/2}\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\nu_1u}{\nu_2}\right)\right]^{(\nu_1+\nu_2)/2}}$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\nu_1^{\nu_1/2}\nu_2^{\nu_2/2}u^{(\nu_1/2)-1}(\nu_2+\nu_1u)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}$$

而若$u\leqslant0$时,$h(u)=0$,它就是所要求的结果.

4.46 证明:若$\nu_1>2$,在值$\left(\frac{\nu_1-2}{\nu_1}\right)\left(\frac{\nu_2}{\nu_2+2}\right)$处有$F$分布的单峰.

证明 ☞ 众数定位在密度函数的极大值,除常数外,F分布的密度函数是

$$u^{(\nu_1/2)-1}(\nu_2+\nu_1u)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}$$

若它有相对极大,则它在该处的导数是0,即

$$\left(\frac{\nu_1}{2}-1\right)u^{(\nu_1/2)-2}(\nu_2+\nu_1u)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}-u^{(\nu_1/2)-1}\nu_1\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)(\nu_2+\nu_1u)^{-[(\nu_1+\nu_2)/2]-1}=0$$

用 $u^{(\nu_1/2)-2}(\nu_2+\nu_1 u)^{-[(\nu_1+\nu_2)/2]-1}$除上式，$u\neq 0$，我们有

$$\left(\frac{\nu_1}{2}-1\right)(\nu_2+\nu_1 u)-u\nu_1\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)=0 \text{ 或 } u=\left(\frac{\nu_1-2}{\nu_1}\right)\left(\frac{\nu_2}{\nu_2+2}\right)$$

用二阶导数检验，我们可指出这实际上给出极大值.

4.47　利用附录 F 里的 F 分布表，求(a)$F_{0.95,10,15}$，(b)$F_{0.99,15,9}$，(c)$F_{0.05,8,30}$，(d)$F_{0.01,15,9}$.

解 ☞ (a)从附录 F，那里 $\nu_1=10,\nu_2=15$，我们得到 $F_{0.95,10,15}=2.54$.

(b)从附录 F，那里 $\nu_1=15,\nu_2=9$，我们得到 $F_{0.99,15,9}=4.96$.

(c)根据定理 4-8，$F_{0.05,8,30}=\dfrac{1}{F_{0.95,30,8}}=\dfrac{1}{3.08}=0.325$.

(d)根据定理 4-8，$F_{0.01,15,9}=\dfrac{1}{F_{0.99,9,15}}=\dfrac{1}{3.89}=0.257$.

F,χ^2 与 t 分布之间的关系

4.48　检验(a)$F_{0.95}=t^2_{0.975}$，(b)$F_{0.99}=t^2_{0.995}$.

解 ☞ (a)比较附录 F 中，$F_{0.95}$表的第一列的各个值与 t 分布 $t_{0.975}$下的值，可以看到 $161=(12.71)^2$，$18.5=(4.30)^2$，$10.1=(3.18)^2$，$7.71=(2.78)^2$，等等.

(b)比较附录 F 中，$F_{0.99}$表的第一列的各个值与 t 分布 $t_{0.995}$下的值，可以看到 $4\ 050=(63.66)^2$，$98.5=(9.92)^2$，$34.1=(5.84)^2$，$21.2=(4.60)^2$，等等.

4.49　证明定理 4-9，它可简明表述成

$$F_{1-p}=t^2_{1-(p/2)}$$

且因此概括了习题 4.48 的结果.

证明 ☞ 在 F 分布的密度函数中(本章(45)式)，令 $\nu_1=1,\nu_2=\nu$.则对 $u>0$，

$$f(u)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\nu^{\nu/2}u^{-1/2}(\nu+u)^{-(\nu+1)/2}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\nu^{\nu/2}u^{-1/2}\nu^{-(\nu+1)/2}\left(1+\frac{u}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}u^{-1/2}\left(1+\frac{u}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

对 $u\leqslant 0$，$f(u)=0$.现在，用百分位数值的定义，F_{1-p}满足$P(U\leqslant F_{1-p})=1-p$.因此，

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^{F_{1-p}}u^{-1/2}\left(1+\frac{u}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}du=1-p$$

在积分中作变数替换 $t=+\sqrt{u}$：

$$2\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^{+\sqrt{F_{1-p}}}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}dt=1-p$$

与本章(42)式比较，我们看到最后这个方程式的左边等于

$$2\cdot P(0<T\leqslant+\sqrt{F_{1-p}})$$

这里 T 是具有 ν 个自由度的学生氏 t 分布.因此，

$$\begin{aligned}\frac{1-p}{2}&=P(0<T\leqslant+\sqrt{F_{1-p}})\\&=P(T\leqslant+\sqrt{F_{1-p}})-P(T\leqslant 0)\\&=P(T\leqslant+\sqrt{F_{1-p}})-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

这里我们利用了 t 分布的对称性. 我们解得

$$P(T \leqslant +\sqrt{F_{1-p}}) = 1 - \frac{p}{2}$$

但是, 根据定义, $t_{1-(p/2)}$ 是这样的数

$$P(T \leqslant t_{1-(p/2)}) = 1 - \frac{p}{2}$$

且该数是惟一确定的, 由于 t 分布的密度函数是严格正的, 因此,

$$+\sqrt{F_{1-p}} = t_{1-(p/2)} \quad 或 \quad F_{1-p} = t^2_{1-(p/2)}$$

证毕.

4.50 检验定理 4-10, 对于(a) $p=0.95$, (b) $p=0.99$.

解 ☞ (a)将附录 F 中 $F_{0.95}$ 表的最后一行的各个值(对应 $\nu_2=\infty$)与附表 E 中 $\chi^2_{0.95}$ 下的值进行比较, 可以看到

$$3.84=\frac{3.84}{1}, 3.00=\frac{5.99}{2}, 2.60=\frac{7.81}{3}, 2.37=\frac{9.49}{4}, 2.21=\frac{11.1}{5}, 等等.$$

这些提供了所要求的检验.

(b)将附录 F 中 $F_{0.99}$ 表的最后一行的各个值(对应 $\nu_2=\infty$)与附表 E 中 $\chi^2_{0.99}$ 下的值进行比较, 可以看到

$$6.63=\frac{6.63}{1}, 4.61=\frac{9.21}{2}, 3.78=\frac{11.3}{3}, 3.32=\frac{13.3}{4}, 3.02=\frac{15.1}{5}, 等等.$$

这些提供了所要求的检验.

在 F 分布中, 让 $\nu_2\to\infty$, 即得定理 4-10 的一般证明.

二元正态分布

4.51 假设 X 和 Y 的联合密度函数是二元正态分布的随机变量. 描述 X 和 Y 当且仅当它们的相关系数是 0 时是独立的随机变量.

解 ☞ 若相关系数 $\rho=0$, 则本章(49)式中的二元密度函数变成

$$f(x,y) = \left[\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2}\right]\left[\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-(y-\mu_2)^2/2\sigma_2^2}\right]$$

且由于对于所有的 x 和 y 的值, 这是单变量 x 的函数与单变量 y 的函数的一个乘积, 因此 X 和 Y 是独立的随机变量.

反之, 若 X 和 Y 是独立的随机变量, 则由(49)式给出的 $f(x,y)$ 必对 x 和 y 的所有的值是单变量 x 的函数与单变量 y 的乘积, 这仅当 $\rho=0$ 时才有可能.

其他分布

4.52 求一枚匀称的骰子, 在第五次抛掷时第一次出现 3 的概率.

解 ☞ **方法 1** 第一次抛掷不出现 3 的概率是 5/6. 类似地, 第二次抛掷不出现 3 的概率是 5/6, 等等. 则前 4 次抛掷不出现 3 的概率是 $(5/6)(5/6)(5/6)(5/6)=(5/6)^4$. 因此, 由于第五次抛掷出现 3 的概率是 1/6, 所要求的概率是

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{625}{7\,776}$$

方法 2(利用公式) 利用 $p=1/6$, $q=5/6$, $x=5$ 的几何分布, 我们知道所要求的概率是

$$\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{7\,776}$$

4.53 检验威布尔(Weibull)分布对于(a)均值, (b)方差的表示式.

解 ☞ (a)

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= \int_0^\infty abx^b e^{-ax^b}dx \\ &= \frac{ab}{a^{1/b}}\int_0^\infty \left(\frac{u}{a}\right)e^{-u}\frac{1}{b}u^{(1/b)-1}du \\ &= a^{-1/b}\int_0^\infty u^{1/b}e^{-u}du\end{aligned}$$

$$= a^{-1/b}\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right)$$

这里我们在求积分时利用了替换 $u = ax^b$.

(b)

$$E(X^2) = \int_0^\infty abx^{b+1}e^{-ax^b}dx$$
$$= \frac{ab}{a^{1/b}}\int_0^\infty \left(\frac{u}{a}\right)^{1+(1/b)} e^{-u}\ \frac{1}{b}u^{(1/b)-1}du$$
$$= a^{-2/b}\int_0^\infty u^{2/b}e^{-u}du$$
$$= a^{-2/b}\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right)$$

则

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2 = a^{-2/b}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{b}\right)\right]$$

综合问题

4.54 进入一个学院的学生将准予毕业的概率是0.4,确定5名学生中以下各情形的概率:
(a)无人,(b)1人,(c)至少1人
将准予毕业.

解 (a)P(无人准予毕业)$= {}_5C_0(0.4)^0(0.6)^5 = 0.07776$,或大约0.08.

(b)P(1人准予毕业)$= {}_5C_1(0.4)^1(0.6)^4 = 0.2592$,或大约0.26.

(c)P(至少1人准予毕业)$= 1 - p$(无人准予毕业)$= 0.9224$,或大约0.92.

4.55 在6次抛掷一对骰子中,在以下情形:
(a)两次,(b)至少两次
出现总点数为9的概率是什么?

解 第1枚骰子可能出现6种情形,它的每一种与第2枚骰子可能出现的6种情形分别组合起来就是$6\cdot6=36$种两枚骰子同时出现的情形,它们是:第1枚骰子的1与第2枚骰子的1,第1枚骰子的1与第2枚骰子的2,等等,用(1,1),(1,2)等等表示之.

若骰子是匀称的,则这36种情形都是相同的可能,在4种情形中发生总点数为9:(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),则一对骰子在每单次抛掷中出现总点数9的概率是 $p = 4/36 = 1/9$,且一对骰子在每单次抛掷中不出现总点数9的概率是 $q = 1 - p = 8/9$.

(a)P(在6次抛掷中2次出现总点数9)

$$= {}_6C_2\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{8}{9}\right)^{6-2} = \frac{61\ 440}{531\ 441}$$

(b)P(至少2次出现总点数9)

$= P$(2次出现总点数9)$+ P$(3次出现总点数9)$+\cdots+ P$(6次出现总点数9)

$$= {}_6C_2\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{8}{9}\right)^4 + {}_6C_3\left(\frac{1}{9}\right)^3\left(\frac{8}{9}\right)^3 + {}_6C_4\left(\frac{1}{9}\right)^4\left(\frac{8}{9}\right)^2 + {}_6C_5\left(\frac{1}{9}\right)^5\frac{8}{9} + {}_6C_6\left(\frac{1}{9}\right)^6$$
$$= \frac{61\ 440}{531\ 441} + \frac{10\ 240}{531\ 441} + \frac{960}{531\ 441} + \frac{48}{531\ 441} + \frac{1}{531\ 441} = \frac{72\ 689}{531\ 441}$$

另解 P(至少2次出现总点数9)

$= 1 - P$(不出现总点数9)$- P$(1次出现总点数9)

$$= 1 - {}_6C_0\left(\frac{1}{9}\right)^0\left(\frac{8}{9}\right)^6 - {}_6C_1\left(\frac{1}{9}\right)^1\left(\frac{8}{9}\right)^5 = \frac{72\ 689}{531\ 441}$$

4.56 若有缺陷的螺栓的概率是0.1,求400个螺栓中的有缺陷的螺栓分布的
(a)均值,(b)标准差.

解 (a)均值$= np = 400(0.1) = 40$,即,我们可期望40个螺栓是有缺陷的.

(b)方差$= npq = 400(0.1)(0.9) = 36$,因此标准差$= \sqrt{36} = 6$.

4.57 求习题4.56中,分布的(a)偏度,(b)峰度系数.

解 (a)

$$偏度系数 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} = \frac{0.9-0.1}{6} = 0.133$$

由于它是正的,所以分布向右边偏.

(b) $$峰度系数 = 3 + \frac{1-6pq}{npq} = 3 + \frac{1-6\times0.1\times0.9}{36} = 3.01$$

该分布比正态分布的峰稍高.

4.58 生物学的小测验的等级是 0,1,2,…,10 点,依赖回答 10 个问题的正确个数,平均等级是 6.7,标准差是 1.2.假设等级是服从正态分布的,确定(a)得 6 点分数学生的百分率,(b)班里最差的 10% 中的最大的等级,(c)班里最好的 10% 中的最小的等级.

解 ☞ (a)应用正态分布到离散数据,将它们看作连续的,就需要作数据处理,于是 6 点的分数考虑作 5.5 到 6.5 点,见图 4-20.

$$5.5 的标准单位 = (5.5-6.7)/1.2 = -1.0$$

$$6.5 的标准单位 = (6.5-6.7)/1.2 = -0.17$$

$$\begin{aligned}要求的比例 &= (z=-1 与 z=-0.17 之间的面积)\\ &= (z=-1 与 z=0 之间的面积) - (z=-0.17 与 z=0 之间的面积)\\ &= 0.3413 - 0.0675 = 0.2738 = 27\%\end{aligned}$$

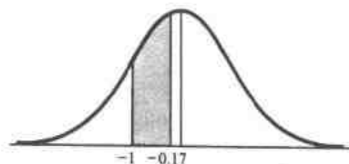


图 4-20

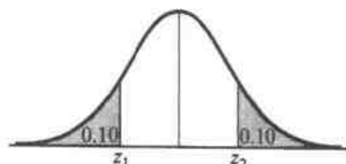


图 4-21

(b)令 x_1 是要求的最大的等级且 z_1 与其标准单位相等.从图 4-21,z_1 左边的面积是 10% = 0.10,因此,z_1 与 0 之间的面积 = 0.40,$z_1 = -1.28$(很接近),则 $z_1 = (x_1-6.7)/1.28 = -1.28$,$x_1 = 5.2$ 或 5 是最靠近的整数.

(c)令 x_2 是要求的最小的等级且 z_2 与其标准单位相等,由(b)根据对称性,$z_2 = 1.28$,则$(x_2-6.7)/1.2 = 1.28$,$x_2 = 8.2$ 或 8 是最靠近的整数.

4.59 盖格计数器是用来计算放射粒子的放射数的,求在时间 t 时,计数到放射粒子数为零的概率.

解 ☞ 令图 4-22 表示具有原点 O 的时间轴,在很小的时间 Δt 内有放射粒子的概率是成比例于 Δt 的,于是可写成 $\lambda\Delta t$,因此在时间 Δt 内计算出放射粒子数为零的概率是 $1-\lambda\Delta t$,更确切地说,当 Δt 很小时,$(\Delta t)^2$ 和更高阶的项可以忽略.

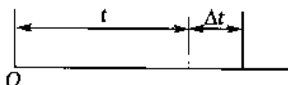


图 4-22

令 $P_0(t)$是在时间 t 计数为零的概率,$P_0(t+\Delta t)$是时间 $t+\Delta t$ 计数为零的概率.若粒子的放射是独立事件,则在时间 $t+\Delta t$ 计数为零的概率是在时间 t 计数为零的概率与在时间 Δt 内计数为零的概率的乘积.因此,忽略$(\Delta t)^2$ 和更高阶的项,我们有

(1) $$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)[1-\lambda\Delta t]$$

从(1)我们得到

(2) $$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t)$$

即

(3) $$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 \quad 或 \quad \frac{dP_0}{P_0} = -\lambda dt$$

用积分解(3)得到

$$\ln P_0 = -\lambda t + c_1 \quad 或 \quad P_0(t) = ce^{-\lambda t}$$

注意到,若 $t=0$,$P_0(0)=c$,$P_0(0)$是在时间 0 放射数为零的概率,当然 $P_0(0)=1$,于是 $C=1$ 且要求的概率是

(4) $$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

4.60 参考习题 4.59,求在时间 t 计数的放射粒子数恰为 1 的概率.

解 ☞ 令 $P_1(t)$是在时间 t 计数的放射粒子数恰为 1 的概率，$P_1(t+\Delta t)$是在时间 $t+\Delta t$ 计数的放射粒子数恰为 1 的概率. 在下列两个彼此互斥的情形里，在时间 $t+\Delta t$ 计数的放射粒子数恰为 1：
(ⅰ)在时间 t 计数的放射粒子数恰为 1，而在时间 Δt 内放射数等于 0.
(ⅱ)在时间 t 计数的放射粒子数为 0，而在时间 Δt 内计数的放射粒子数恰为 1.
于是，忽略包含$(\Delta t)^2$ 与更高阶的项，

(1) $$P_1(t+\Delta t)=P_1(t)(1-\lambda\Delta t)+P_0(t)\lambda\Delta t$$

这可写成

(2) $$\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}=\lambda P_0(t)-\lambda P_1(t)$$

取极限 $\Delta t\to 0$ 且利用在习题 4.59 中得到 $P_0(t)$的表示式，(2)变成

(3) $$\frac{dP_1}{dt}=\lambda e^{-\lambda t}-\lambda P_1$$

或

(4) $$\frac{dP_1}{dt}+\lambda P_1=\lambda e^{-\lambda t}$$

利用乘积的求导公式，(4)可写成

(5) $$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_1)=\lambda$$

积分后得到

(6) $$P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}+c_2e^{-\lambda t}$$

若 $t=0$，$P_1(0)$是在时间 0 的 1 计数的概率，它是 0，于是得到 $c_2=0$，因此，

(7) $$P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$$

继续这样作下去，我们可用下式给出在时间 t 的 n 计数的概率

(8) $$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

这就是泊松分布.

补 充 习 题

二项分布

4.61 求 6 次抛掷一枚匀称的硬币中，将出现以下几种情形：
(a)0，(b)1，(c)2，(d)3，(e)4，(f)5，(g)6 正面的概率.

4.62 求单次抛掷 6 枚匀称的硬币中，出现以下情形(a)2 或多于 2 个正面，(b)少于 4 个正面的概率.

4.63 若 X 表示在单次抛掷 4 枚匀称的硬币出现正面的个数，求(a)$P(X=3)$，(b)$P(X<2)$，(c)$P(X\leqslant 2)$，(d)$P(1<X\leqslant 3)$.

4.64 从每一个家庭有 5 个小孩的 800 个家庭中，你期望有(a)3 个男孩，(b)5 个女孩，(c)2 或 3 个男孩的家庭是多少？假设对于男孩和女孩是等概的.

4.65 求在两次抛掷一对匀称的骰子中，(a)一次，(b)两次得到 11 总点数的概率.

4.66 在 3 次抛掷一对骰子中，恰有一次得到 9 点数的概率是什么？

4.67 在是非题测验中，求对 10 个回答至少猜对 6 个的概率.

4.68 卖保险单给 5 个男人，他们都同岁且都健康. 按照实际的表，这种特殊岁数的一个男人将活 30 年的概率是$\frac{2}{3}$，求在 30 年中，以下情形：
(a)所有 5 个男人，(b)至少 3 个男人，(c)仅 2 个男人，(d)至少 1 个男人还活着的概率.

4.69 对于 $p=0.7$ 和 $n=60$ 的二项分布，计算(a)均值，(b)标准差，(c)偏度系数，(d)峰度系数，并对结果作解释.

4.70 说明如果 $n=100$ 的二项分布是对称的，它的峰度系数是 2.9.

4.71 对于二项分布计算(a)$\sum(x-\mu)^3 f(x)$，(b)$\sum(x-\mu)^4 f(x)$.

正态分布

4.72 在统计测验中，均值是 78 和标准差是 10.

(a)确定得分分别是 93 和 62 的两个学生的标准分数,(b)确定标准分数分别是 -0.6 和 1.2 的两个学生的得分.

4.73 在得分为 70 和 88 所对应的标准分数分别是 -0.6 和 1.4 的测验中,求(a)均值,(b)标准差.

4.74 求在正态曲线下,以下情形:
(a)$z=-1.20$ 与 $z=2.40$,(b)$z=1.23$ 与 $z=1.87$,(c)$z=-2.35$ 与 $z=-0.50$
之间的面积.

4.75 求在正态曲线下,以下情形:
(a)$z=-1.78$ 的左边,(b)$z=0.56$ 的左边,(c)$z=-1.45$ 右边,(d)对应于 $z\geqslant 2.16$,(e)对应于 $-0.80\leqslant z\leqslant 1.53$,(f)$z=-2.52$ 的左边与 $z=1.83$ 的右边
所围成的面积.

4.76 若 Z 是具有均值 0 和方差 1 的正态分布的随机变量,求(a)$P(Z\geqslant -1.64)$,(b)$P(-1.96\leqslant Z\leqslant 1.96)$,(c)$P(|Z|\geqslant 1)$.

4.77 求满足下列情形的 z 值:
(a)z 的右边的面积是 0.2266,(b)z 的左边的面积是 0.0314,(c)-0.23 与 z 之间的面积是 0.5722,(d)1.15 与 z 之间的面积是 0.0730,(e)$-z$ 与 z 之间的面积是 0.9000.

4.78 若 $P(Z\geqslant z_1)=0.84$,求 z_1,这里 Z 是具有均值 0 和方差 1 的正态分布的随机变量.

4.79 若 X 是具有均值 5 与标准差 2 的正态分布的随机变量,求 $P(X>8)$.

4.80 若 300 个学生的身高是服从具有均值 68.0 英寸和标准差 3.0 英寸的正态分布的,有多少学生身高(a)大于 72 英寸,(b)小于或等于 64 英寸,(c)65 与 71 英寸之间,包括 65,71,(d)等于 68 英寸?假定测量记录是最靠近的英寸.

4.81 若球轴承直径是服从具有均值 0.6140 英寸和标准差 0.0025 英寸的正态分布的,对下列情形确定球轴承的直径的百分率:
(a)0.610 与 0.618 英寸之间,包括两端,(b)大于 0.617 英寸,(c)小于 0.608 英寸,(d)等于 0.615 英寸.

4.82 期终测验的平均成绩是 72,标准差是 9,得 A 等级的学生是其中最好的 10%.学生要得 A 等级的最少得分是多少?

4.83 假定一组测量值是正态分布的,求下列百分率,(a)与均值之差超过二分之一标准差的部分,(b)与均值之差小于四分之三标准差的部分.

4.84 服从正态分布的一组测量值的均值是 μ 和标准差是 σ,求下列情形下测量值的百分率是多少?
(a)$\mu\pm 2\sigma$ 的范围内,(b)$\mu\pm 1.2\sigma$ 的范围外,(c)大于 $\mu-1.5\sigma$.

4.85 在习题 4.84 中求常数 a 有下列情形的百分率:
(a)$\mu\pm a\sigma$ 范围内是 75%,(b)小于 $\mu-a\sigma$ 是 22%.

对二项分布的正态近似

4.86 求抛掷 200 次一枚硬币,出现下列情形的概率:
(a)80 与 120 之间正面数,包括两端,(b)小于 90 正面数,(c)小于 85 或大于 115 正面数,(d)正好 100 正面数.

4.87 在是非题测验中,求学生在下列情形下猜对答案的概率:
(a)20 个的 12 或更多的,(b)40 个的 24 或更多的.

4.88 机器生产的螺栓 10%有缺陷,求用该机器生产的 400 个螺栓的随机样本中,在下列情形下有缺陷的概率:
(a)最多 30,(b)30 与 50 之间,(c)35 与 45 之间,(d)65 或更多的.

4.89 求抛掷一对匀称的骰子 100 次中有多于 25 次总点数为 7 的概率.

泊松分布

4.90 若公司制造的电灯泡中的 3%是有缺陷的,求 100 个电灯泡的样本中,在下列情形下有缺陷的概率:
(a)0,(b)1,(c)2,(d)3,(e)4,(f)5 个电灯泡.

4.91 在习题 4.90 中,求在下列情形下有缺陷的概率:
(a)多于 5,(b)1 与 3 之间,(c)少于或等于 2 个电灯泡.

4.92　一个口袋里含有 1 个红弹子和 7 个白弹子，从袋里抽取 1 个弹子，观察其颜色后放回该袋里，利用(a)二项分布，(b)泊松近似二项分布，求这样抽取 8 次抽着红弹子 3 次的概率.

4.93　按照在美国每 100 000 人口中每年偶然淹死的平均数是 3.0.求在 200 000 人口的一个城市中，每年偶然淹死人数为下列情形的概率：

(a)0，(b)2，(c)6，(d)8，(e)4 与 8 之间，(f)少于 3.

4.94　证明：若 X_1 和 X_2 是具有参数 λ_1 和 λ_2 的独立的泊松变量，则 X_1+X_2 有关于参数 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布(提示：利用矩母函数).概括为 n 个变量的结果.

多项分布

4.95　抛掷 1 枚匀称的骰子 6 次，求下列情形下的概率：

(a)1 点出现 1 次，2 点出现 2 次，3 点出现 3 次，(b)每面出现 1 次.

4.96　一个盒子按比 4:3:2:1 装有很大数量的红、白、蓝和黄的弹子，求抽取 10 次中出现下列情形的概率：

(a)抽取到 4 红，3 白，2 蓝和 1 黄的弹子，(b)抽取到 8 红和 2 黄的弹子.

4.97　求抛掷 1 枚匀称的骰子 4 次，未得到 1，2 或 3 的概率.

超几何分布

4.98　一个盒子里含有 5 红和 10 白的弹子，若选取 8 个弹子(无放回)，确定以下情形的概率：

(a)选取 4 红，(b)选取 8 个全是白的，(c)至少一个是红的.

4.99　若随机地从一副普通的 52 张牌中选取 13 张(无放回)，求以下情形的概率：

(a)有 6 张有画的牌，(b)皆无有画的牌.

4.100　一个大学的 60 名申请学生中，40 名来自东方，若随机地挑选 20 名申请学生，求下列概率：

(a)10 人，(b)不多于 2 人来自东方.

均匀分布

4.101　假设 X 是 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 上的均匀分布的随机变量.求(a)$P(X<1)$，(b)$P\left(|X-1|\geqslant\frac{1}{2}\right)$.

4.102　求均匀分布的关于均值的(a)第 3 阶，(b)第 4 阶矩.

4.103　确定均匀分布的(a)偏度系数，(b)峰度系数.

4.104　若 X 和 Y 在从 0 到 1 的区间上是独立的且都是均匀分布的，求 $P(|X-Y|\geqslant\frac{1}{2})$.

柯西分布

4.105　假设 X 是按照(29)式柯西分布的，$a=2$，求(a)$P(X<2)$，(b)$P(X^2\geqslant 12)$.

4.106　证明：若 X_1 和 X_2 是独立的且有相同的柯西分布，则它们的算术平均也有该分布.

4.107　令 X_1 和 X_2 是独立的且具有均值 0 和方差 1 的正态分布，证明：$Y=X_1/X_2$ 是柯西分布的.

伽马分布

4.108　随机变量 X 具有 $\alpha=3$，$\beta=2$ 的伽马分布.求(a)$P(X\leqslant 1)$，(b)$P(1\leqslant X\leqslant 2)$.

卡方分布

4.109　对于具有 12 个自由度的卡方分布，求 χ_c^2 满足下列条件的值：

(a)χ_c^2 右边的面积是 0.05，(b)χ_c^2 左边的面积是 0.99，(c)χ_c^2 右边的面积是 0.025.

4.110　若自由度数 ν 等于(a)8，(b)19，(c)28，(d)40，求 χ^2 的值，使其右侧 χ^2 分布尾部的面积为 0.05.

4.111　若右侧尾部的面积是0.01，解习题 4.110.

4.112　(a)求 χ_1^2 和 χ_2^2，使得对应于 $\nu=20$ 的 χ^2 分布下，χ_1^2 和 χ_2^2 之间的面积为 0.95，假定 χ_2^2 的右侧面积和 χ_1^2 左侧的面积相等.

(b)说明如果不做(a)中相等面积的假定，值 χ_1^2 和 χ_2^2 不是惟一的.

4.113　若变量 U 是 $\nu=7$ 的卡方分布，求满足下列条件的 χ_1^2 和 χ_2^2：

(a)$P(U>\chi_2^2)=0.025$，(b)$P(U<\chi_1^2)=0.50$，(c)$P(\chi_1^2\leqslant U\leqslant\chi_2^2)=0.90$.

4.114　对于 $\nu=150$,求(a)$\chi^2_{0.05}$和(b)$\chi^2_{0.95}$.

4.115　对于 $\nu=250$,求(a)$\chi^2_{0.025}$和(b)$\chi^2_{0.975}$.

学生氏 t 分布

4.116　对于具有 15 个自由度的学生氏分布,求满足下列条件的 t_1 值:
(a)t_1 右边的面积是 0.01,(b)t_1 左边的面积是 0.95,(c)t_1 右边的面积是 0.10,(d)t_1 右边与 $-t_1$ 左边的组合面积是 0.01,(e)$-t_1$ 与 t_1 之间的面积是 0.95.

4.117　若自由度数 ν 等于(a)4,(b)12,(c)25,(d)60,(e)150,求 t 值,使其右侧 t 分布尾部的面积为 0.01.

4.118　满足下列条件的每一个,求学生氏分布的 t_1 值:
(a)$-t_1$ 与 t_1 之间的面积是 0.90 且 $\nu=25$,
(b)$-t_1$ 左边的面积是 0.025 且 $\nu=20$,
(c)t_1 右边与 $-t_1$ 左边的组合面积是 0.01 且 $\nu=5$,
(d)t_1 右边的面积是 0.55 且 $\nu=16$.

4.119　若变量 U 有 $\nu=10$ 的学生氏分布,求满足下列条件的常数 c:
(a)$P(U>c)=0.05$,(b)$P(-c\leqslant U\leqslant c)=0.98$,(c)$P(U\leqslant c)=0.20$,(d)$P(U\geqslant c)=0.90$.

F 分布

4.120　计算下列的每一个:
(a)$F_{0.95,15,12}$,(b)$F_{0.99,120,60}$,(c)$F_{0.99,60,24}$,(d)$F_{0.01,30,12}$,(e)$F_{0.05,9,20}$,(f)$F_{0.01,8,8}$.

补充习题答案

4.61　(a)1/64,(b)3/32,(c)15/64,(d)5/16,(e)15/64,(f)3/32,(g)1/64

4.62　(a)57/64,(b)21/32

4.63　(a)1/4,(b)5/16,(c)11/16,(d)5/8

4.64　(a)250,(b)25,(c)500

4.65　(a)17/162,(b)1/324

4.66　64/243

4.67　193/512

4.68　(a)32/243,(b)192/243,(c)40/243,(d)242/243

4.69　(a)42,(b)3.550,(c)−0.1127,(d)2.927

4.71　(a)$npq(q-p)$,(b)$npq(1-6pq)+3n^2p^2q^2$

4.72　(a)1.5,−1.6,(b)72,90

4.73　(a)75.4,(b)9

4.74　(a)0.8767,(b)0.0786,(c)0.2991

4.75　(a)0.0375,(b)0.7123,(c)0.9265,(d)0.0154,(e)0.7251,(f)0.0395

4.76　(a)0.9495,(b)0.9500,(c)0.6826

4.77　(a)0.75,(b)−1.86,(c)2.08,(d)1.625 或 0.849,(e)±1.645

4.78　−0.995

4.79　0.0668

4.80　(a)20,(b)36,(c)227,(d)40

4.81　(a)93%,(b)8.1%,(c)0.47%,(d)15%

4.82　84

4.83　(a)61.7%,(b)54.7%

4.84　(a)95.4%,(b)23.0%,(c)93.3%

4.85　(a)1.15,(b)0.77

4.86　(a)0.9962,(b)0.0687,(c)0.0286,(d)0.0558

4.87　(a)0.2511,(b)0.1342

4.88　(a)0.0567,(b)0.9198,(c)0.6404,(d)0.0079

4.89 0.0089

4.90 (a)0.04979,(b)0.1494,(c)0.2241,(d)0.2241,(e)0.1680,(f)0.1008

4.91 (a)0.0838,(b)0.5976,(c)0.4232

4.92 (a)0.05610,(b)0.06131

4.93 (a)0.00248,(b)0.04462,(c)0.1607,(d)0.1033,(e)0.6964,(f)0.0620

4.95 (a)5/3888,(b)5/324

4.96 (a)0.0348,(b)0.000295

4.97 1/16

4.98 (a)70/429,(b)1/143,(c)142/143

4.99 (a)$\binom{13}{6}\binom{39}{7}\Big/\binom{52}{13}$,(b)$\binom{13}{0}\binom{39}{13}\Big/\binom{52}{13}$

4.100 (a)$\binom{40}{10}\binom{20}{10}\Big/\binom{60}{20}$,(b)$[({}_{40}C_0)({}_{20}C_{20})+({}_{40}C_1)({}_{20}C_{19})+({}_{40}C_2)({}_{20}C_{18})]/{}_{60}C_{20}$

4.101 (a)3/4,(b)3/4

4.102 (a)0,(b)$(b-a)^4/80$

4.103 (a)0,(b)9/5

4.104 1/4

4.105 (a)3/4,(b)1/3

4.108 (a)$1-\frac{13}{8\sqrt{e}}$,(b)$\frac{13}{8}e^{-1/2}-\frac{5}{2}e^{-1}$

4.109 (a)21.0,(b)26.2,(c)23.3

4.110 (a)15.5,(b)30.1,(c)41.3,(d)55.8

4.111 (a)20.1,(b)36.2,(c)48.3,(d)63.7

4.112 (a)9.59 和 34.2

4.113 (a)16.0,(b)6.35,(c)假设在两个尾部的面积相等,$\chi_1^2=2.17$ 和 $\chi_2^2=14.1$

4.114 (a)122.5,(b)179.2

4.115 (a)207.7,(b)295.2

4.116 (a)2.60,(b)1.75,(c)1.34,(d)2.95,(e)2.13

4.117 (a)3.75,(b)2.68,(c)2.48,(d)2.39,(e)2.33

4.118 (a)1.71,(b)2.09,(c)4.03,(d)−0.128

4.119 (a)1.81,(b)2.76,(c)−0.879,(d)−1.37

4.120 (a)2.62,(b)1.73,(c)2.40,(d)0.352,(e)0.340,(f)0.166

部分Ⅱ 统 计

第五章 抽样理论

总体和样本,统计推断

在实践中,我们常想从一大群个体或实物中提取有用的结论.所要考察的整个的一大群被称为总体.但是全部的考察可能是困难的,甚至是不可能的,我们仅能考察总体的一部分,这部分称为样本.我们的目的是从样本发现的结果去推断总体的某种事实,这一过程称为统计推断.获得样本的过程称为抽样.

例 5.1 我们希望提取12 000个成年学生(总体)的身高(或体重)的信息,现仅从这个总体中选择 100 个学生(样本)作考察.

例 5.2 一个工厂在一周6个工作日中制造了一批螺钉,要想得到这批螺钉的次品率.在每个生产日中的某个时间从该日生产的螺钉中提取 20 个进行考察.这时,一周中生产的螺钉组成总体,提取的 120 个螺钉构成样本.

例 5.3 重复投掷一枚硬币,考察它的匀称性.全部可能的硬币投掷组成总体.样本是已经考察到的投掷,例如,进行了前 60 次投掷并记录了正面和反面的百分数.

例 5.4 一个罐子装有 200 个弹子(总体),想要考察它们的颜色,从罐中选取 20 个作样本,每个选中的弹子看完颜色后再放回罐中.

有几点应该注意.第一,词总体与日常语言中的意义并不一定完全相同,例如日常可以说"某地人口总体有 180 000".第二,总体也经常用于指测量或观测,不仅限于个体或实物.在例 5.1 中,可以说 12 000 个身高(或体重)总体,在例 5.4 中,可以说罐中的全部 200 个颜色(它们中的一些可以是相同的)是总体.第三,总体可以是有限的或无限的,该数称为总体的容量,通常记为 N.类似地,样本中的数目称为样本大小或样本容量,记为 n,一般它是有限的.在例 5.1 中 $N=12\ 000$, $n=100$,例 5.3 中,N 是无限的,$n=60$.

无放回抽样

如果我们从一个罐子中抽取一个物体,再下一次抽取前,可以有将该物体放回或不放回两种选择.前一种选择中,一个特定的物体可以一次再一次地被抽中,而后一种选择中,一个物体仅能抽中一次.总体的每一员可以被抽中多次的抽样称为有放回抽样,仅能抽中一次的称为无放回抽样.

对一个有限总体作有放回抽样,理论上可以考虑为无限总体,因为任何样本量的样本均可以选择,而不会穷尽总体.对一个非常大的有限总体抽样时,实用上常考虑为无限总体抽样.

随机样本,随机数

显然,从总体中抽样所作结论的可靠性,依赖于样本是否选取得适当,能够充分好地代表总体.如何选取样本当然是统计推断的一个重要问题.

从有限总体抽样的一种方法是保证总体的每一员有同等机会进入样本,这样的抽样常称为随机抽样.对相当小的总体,可以用抽签的方式完成随机抽样,也可以等价地使用为此目的特殊构造的随机数表(附录 H)来完成.参看习题 5.43.

由于从样本推断总体不是完全确定的，对结论的任何一种状态都需要使用概率的语言.

总体参数

当描述总体的随机变量 X 的概率分布 $f(x)$（概率函数或密度函数）已知时，我们认为总体是已知的.例如，在例 5.1 中，12 000 个学生的高度（或体重）的值是一个随机变量 X，X 有一个概率分布 $f(x)$.

倘若 X 是正态分布的，我们就说总体是正态分布的，或者说有一个正态总体.类似地，如果 X 是二项分布的，则说总体是二项分布的，或者说有一个二项总体.

在 $f(x)$ 中会有一些数量，如正态分布中的 μ 和 σ^2，或二项分布中的 p，以及另一些可由这些数确定的中位数、矩、偏度等等.这些量常称为总体参数.当总体已知时，这些总体参数都是已知的.

当总体的概率分布 $f(x)$ 不是完全清楚时，对 $f(x)$ 虽然有一些概念，可以做出某些假设，但 $f(x)$ 的总的状况仍会是一个重要问题.例如，我们可以有理由认为某一特定分布是正态分布，而这时仍不知 μ 和 σ^2 的两个值，所以希望对它们作出统计推断.

样本统计量

我们可以从总体中取随机样本，然后使用这些样本，从而获得对总体参数进行估计或假设检验所需的值.

为了说明问题，来考虑例 5.1，其中随机变量 X 有各种高度值.为了得到容量为 100 的样本，首先要从总体中随机地选取单个个体.这个个体可以取各种可能的高度值中的一个，为随机变量 X_1，它有一个实现值 x_1，其中的下标 1 指明是第一个选取.类似地，选样本的第二个个体，有某个可能高度的值 x_2，x_2 是随机变量 X_2 可能取的一个值，继续下去，直到 X_{100}，达到样本量 100.为了简单，我们假定抽样是有放回的，所以同一个体可以被抽中多次.在实际工作中，由于样本容量比总体容量要小得多，因而无放回抽样也常考虑为有放回抽样.

通常容量为 n 的一个样本记为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，它们的值记为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.在有放回时，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立、同分布的随机变量，共同概率分布为 $f(x)$.它们的联合分布则为

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) \tag{1}$$

为了估计总体参数，要从样本获得一个称为样本统计量的量，简称为统计量.数学上，一个容量为 n 的样本的样本统计量是随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的函数，即 $g(X_1,\cdots,X_n)$.这个函数也是一个随机变量，$g(x_1,\cdots,x_n)$ 是它的值.统计量一词有时是指随机变量，有时是指它的值，从课文的上下文内容识别其意义.

一般，对每一个总体参数将会有一个从样本计算的统计量.从样本获得这样的统计量的惯用方法类似于从一个有限总体中获得参数，因为样本是一个有限个值的集合.然而下面我们会看到，这样做并不一定总能获得“最优估计”.所以抽样理论的一个重要问题是如何构成一个适宜的统计量，它将是总体参数的最优估计，后一章将考虑这一问题.

今后约定一般用希腊字母 μ 和 σ 等表示总体参数，而用罗马字母 m、s 等表示对应的样本统计量.

抽样分布

我们已经看到，从样本 $X_1,\cdots,X_n$ 计算的一个样本统计量是这些随机变量的一个函数，它本身也是一个随机变量.一个样本统计量的概率分布常称为该统计量的抽样分布.

换一个角度，我们也可以考虑从总体中抽取样本容量为 n 的各种可能样本，对每一个样本计算这个统计量.用这种方法会获得统计量的分布，这就是它的抽样分布.

从抽样分布当然可以计算期望值、方差、标准差、矩，等等.标准差有时也称为标准误差.

样本均值

如前所述,设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 记样本容量为 n 的随机样本,它们是独立同分布的随机变量.样本均值也是一个随机变量,记为

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \tag{2}$$

与第三章的公式(3)类似.在一个特殊的样本中,若以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 记 n 个获得的值,那么该样本的平均数记为

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \tag{3}$$

例 5.5　如果一个容量为 5 的样本,样本值为 7,9,1,6,2,则样本平均数为

$$\bar{x} = \frac{7+9+1+6+2}{5} = 5$$

均值的抽样分布

设 $f(x)$ 是一给定总体的概率分布,从中抽出一个容量为 n 的样本.自然会寻找样本统计量 $\overline{X}$ 的概率分布,这个分布称为样本均值的抽样分布或均值的抽样分布.下面是一些有关的重要定理.

定理 5-1　均值抽样分布的期望值记为 $\mu_{\overline{X}}$,有

$$E(\overline{X}) = \mu_{\overline{X}} = \mu \tag{4}$$

其中 μ 是总体的期望值.

定理 5-2　如果总体是无限的,进行随机抽样,或者总体是有限的,进行有放回抽样,则均值的抽样分布的方差记为 $\sigma_{\overline{X}}^2$,有

$$E[(\overline{X} - \mu)^2] = \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \tag{5}$$

其中 σ^2 是总体的方差.

定理 5-3　如果总体的容量为 N,抽样是无放回的,样本量 $n \leqslant N$,则(5)式将换成

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \tag{6}$$

其中 σ^2 仍与(5)式中意义相同.

注意当 $N \to \infty$ 时,(6)式简化为(5)式.

定理 5-4　如果总体是正态分布,期望值为 μ,方差为 σ^2,则样本均值也是正态分布,期望值为 μ,方差为 σ^2/n.

定理 5-5　假设总体是期望值为 μ,方差为 σ^2 的一个分布(不一定是正态分布),则 $\overline{X}$ 标准化后的随机变量

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{7}$$

有渐近正态分布,即

$$\lim_{n \to \infty} P(Z \leqslant z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2} du \tag{8}$$

定理 5-5 是一个中心极限定理的结论(参看第四章),这里假定总体是无限的或抽样是有放回的.另外,如果用(6)式中的 $\sigma_{\overline{X}}$ 代替(7)式中的 $\sigma/\sqrt{n}$,上述的定理也成立.

比例的抽样分布

假定一个总体是无限的,且具有二项分布,即对某一给定个体具有某种特定性质的概率为 p,不具有的概率为 $q = 1 - p$.例如,总体可以是一个均匀硬币的一切可能投掷,其中事件正面

向上的概率 $p=\frac{1}{2}$.

从这个总体中抽取容量为 n 的一切可能样本,对每一样本可以确定一个统计量,即事件成功的比例 P.在投掷硬币的情况,P 是 n 次投掷中正面向上的比例.可以获得这样的比例的抽样分布,它的期望值 μ_P 和标准差 σ_P 由下式给出:

$$\mu_P = p,\quad \sigma_P = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \tag{9}$$

也就是在式(4)和(5)中用 $\mu=p,\sigma=\sqrt{pq}$.

对较大的 n 值($n\geqslant 30$),上述抽样分布非常接近正态分布,正如在定理 5-5 中看到的那样.

从有限总体中无放回抽样时,(9)式中的第二个等式要用(6)式中那样的 $\sigma_{\overline{X}}$ 代替,其中的 $\sigma=\sqrt{pq}$.

可以注意到,用 n 去除二项分布的期望值和标准差(np 和 $\sqrt{npq}$),会更容易地得到(9)式.

差与和的抽样分布

假设我们给定两个总体.从第一个总体抽出一个容量 n_1 的样本,算出一个统计量 S_1,S_1 有一个抽样分布,其期望值和标准差分别记为 μ_{S_1} 和 σ_{S_1}.类似地,从第二个总体抽出一个容量为 n_2 的样本,算出统计量 S_2,其期望值和标准差分别为 μ_{S_2} 和 σ_{S_2}.

从两个总体中抽取这两个样本的一切可能组合,可以获得差 S_1-S_2 的分布,称之为统计量差的抽样分布.这个抽样分布的期望值和标准差分别记为 $\mu_{S_1-S_2}$,$\sigma_{S_1-S_2}$,则

$$\mu_{S_1-S_2} = \mu_{S_1} - \mu_{S_2},\ \sigma_{S_1-S_2} = \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2} \tag{10}$$

这两个样本的选择相互间无任何联系,也就是说样本是独立的(换句话说,统计量 S_1 与 S_2 是独立的).

例如,如果 S_1 和 S_2 分别是两个总体的样本均值 $\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$,总体的期望值和标准差分别是 μ_1,σ_1 和 μ_2,σ_2,则这两个无限总体样本均值差的抽样分布,由(4)式和(5)式有

$$\mu_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \mu_{\overline{X}_1} - \mu_{\overline{X}_2} = \mu_1 - \mu_2,\ \sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \sqrt{\sigma_{\overline{X}_1}^2 + \sigma_{\overline{X}_2}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \tag{11}$$

这个结果对有放回抽样的有限总体也成立.当 n_1 和 n_2 均较大时($n_1,n_2\geqslant 30$),标准化的变量

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \tag{12}$$

非常接近正态分布.对有限总体的无放回抽样,使用(4)式和(6)式可以得到类似的结果.

如果总体是两个二项分布,参数分别为 p_1,q_1 和 p_2,q_2,比例的差的抽样分布可以得到对应的结果.这时 S_1 和 S_2 对应到成功的比例 P_1 和 P_2,由(11)式得

$$\mu_{P_1-P_2} = \mu_{P_1} - \mu_{P_2} = p_1 - p_2,\quad \sigma_{P_1-P_2} = \sqrt{\sigma_{P_1}^2 + \sigma_{P_2}^2} = \sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}} \tag{13}$$

有时我们对统计量的和感兴趣,而不是统计量的差,这对统计量 S_1 和 S_2 之和的抽样分布,当样本是独立时,期望值和标准差为

$$\mu_{S_1+S_2} = \mu_{S_1} + \mu_{S_2},\quad \sigma_{S_1+S_2} = \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2} \tag{14}$$

与(11)式的结果类似.

样本方差

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是容量为 n 的随机样本,类似于第三章(14)式可定义一个样本方差,这

个随机变量为

$$S^2 = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2}{n} \tag{15}$$

在定理 5-1 中有 $E(\overline{X}) = \mu$，如果也能有 $E(S^2) = \sigma^2$ 将是非常美好的. 当一个统计量的期望值等于对应的总体的参数时，我们称这个统计量是该参数的无偏估计量，其值是一个无偏估计. 然而

$$E(S^2) = \mu_{S^2} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \tag{16}$$

(参看习题 5.20). 当 n 值较大时($n \geqslant 30$)，它很接近 σ^2，要得到无偏估计量，则要定义

$$\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2}{n-1} \tag{17}$$

这样有

$$E(\hat{S}^2) = \sigma^2 \tag{18}$$

因此，许多统计学家愿意用 $\hat{S}^2$ 而不是 S^2 来定义样本方差，他们简单地在(15)式中用 $n-1$ 来代替除数 n. 然而我们将继续用(15)式定义样本方差，因为它可以使后面的许多结果显得简单些.

例 5.6　继续例 5.5，样本方差的值为

$$s^2 = \frac{(4-6)^2 + (7-6)^2 + (5-6)^2 + (8-6)^2 + (6-6)^2}{5} = 2$$

而用上面给的无偏估计则为

$$\hat{s}^2 = \frac{5}{4}s^2 = \frac{(4-6)^2 + (7-6)^2 + (5-6)^2 + (8-6)^2 + (6-6)^2}{4} = 2.5$$

上述结果是认为进行无限总体抽样或有放回的有限总体抽样，如果从容量为 N 的有限总体中无放回抽样，则样本方差的抽样分布的期望值是

$$E(S^2) = \mu_{S^2} = \left(\frac{N}{N-1}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2 \tag{19}$$

当 $N \to \infty$ 时，它简化为(16)式.

方差的抽样分布

从一个总体抽取容量为 n 的一切可能的随机样本，再计算每一样本的方差，可以获得方差的抽样分布. 相对直接求 S^2 或 $\hat{S}^2$ 的抽样分布，求下列相关随机变量的抽样分布要更方便些，

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2}{\sigma^2} \tag{20}$$

下述定理给出了这一随机变量的分布.

定理 5-6　从一个正态分布总体中，抽取容量为 n 的一个随机样本，则(20)式的随机变量有自由度为 $n-1$ 的卡方分布.

由于定理 5-6，(20)式的变量常记为 χ^2，定理的证明参见习题 5.22.

总体方差未知的情形

在定理 5-4 和 5-5 中，我们看到，当容量为 n 的样本来自正态分布总体时，标准化的随机变量

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \tag{21}$$

有正态分布. 如果总体不是正态分布，而 $n \geqslant 30$ 时，它仍是渐近正态的. 当然，在(21)式中总体方差要假定是已知的.

自然会问，当总体方差未知时，情况怎样. 一种可能的方法是用样本方差去估计总体方差，

在(21)式中采用相应的标准差.一个较好的办法是用随机变量 $\hat{S}$ 作为样本标准差去替代σ,寻求对应的统计量的分布.这样构成

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} \tag{22}$$

根据第四章定理 4-6,可以说明当总体随机变量是正态分布时,T 有 $n-1$ 个自由度的学生氏 t 分布.下列定理给出了这个叙述,其证明参见习题 5.24.

定理 5-7　如果容量为 n 的随机样本来自正态分布总体,则(22)式的统计量有 $n-1$ 个自由度的学生氏 t 分布.

方差比的抽样分布

在前面涉及两总体时,我们指明了差的抽样分布,特别是均值差的分布.用同样的想法可以寻求方差之差 $S_1^2 - S_2^2$ 的抽样分布,然而这个抽样分布相当复杂.换一个想法,可以考虑统计量 S_1^2/S_2^2,比值大或小将指明两者有大的差异,而比值接近 1 时,两者差异很小.

定理 5-8　从两个分别具有方差 σ_1^2 和 σ_2^2 的正态总体中,抽取容量分别为 m 和 n 的两个独立随机样本,用 S_1^2, S_2^2 作为随机样本的方差,则统计量

$$F = \frac{mS_1^2/(m-1)\sigma_1^2}{nS_2^2/(n-1)\sigma_2^2} = \frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2} \tag{23}$$

有 $m-1$, $n-1$ 自由度的 F 分布.

其他统计量

除了均值、方差和标准差外,从样本还可以定义许多其他的统计量,例如,中位数、众数、矩、偏度、峰度,等等.这些量的定义与第三章中相应的总体量的定义类似.这些统计量的抽样分布,至少是期望值和标准差常可以求出来.表 5-1 集中给出了一部分.

表 5-1　某些样本统计量的标准差

样本统计量	标准差	注　释
均值	$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	当总体无限或抽样是有放回时,无论样本大还是小,都是对的.当 $n \geqslant 30$ 时,均值的抽样分布接近正态,即使总体是非正态也对.总有 $\mu_{\overline{X}} = \mu$ (总体均值).
比例	$\sigma_P = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$	均值的注释同样适用.总有 $\mu_P = p$.
中位数	$\sigma_{\text{med}} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \frac{1.2533\sigma}{\sqrt{n}}$	当 $n \geqslant 30$ 时,中位数的抽样分布接近正态.仅当总体为正态或近似正态时,有左栏给出的结果.$\mu_{\text{med}} = \mu$.
标准差	(1)　$\sigma_S = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ (2) $\sigma_S = \sqrt{\frac{\mu_4 - \sigma^4}{4n\sigma^2}}$	当 $n \geqslant 100$ 时,S 的抽样分布接近正态.仅当总体是正态或近似正态时,σ_S 用(1).总体非正态时,可以用(2).注意,当 $\mu_4 = 3\sigma^4$ 时,(2)简化为(1),这是正态分布满足的条件. 当 $n \geqslant 100$ 时,近似有 $\mu_S = \sigma$.
方差	(1)　$\sigma_{S^2} = \sigma^2\sqrt{\frac{2}{n}}$ (2) $\sigma_{S^2} = \sqrt{\frac{\mu_4 - \sigma^2}{n}}$	对标准差的注释,这儿也适用.注意,在总体为正态时,(2)变为(1). $\mu_{S^2} = (n-1)\sigma^2/n$ 对较大的 n ($n \geqslant 30$)非常接近 σ^2.

频数分布

如果一个样本(也可以是总体)比较大,了解其各种特征或计算均值、标准差等统计量会比

较困难.因此将原始资料合并或分组是有用的.为了说明问题,假定有一个由 XYZ 大学 100 个男生身高构成的样本.我们将这些数据安排到一些组或类中,确定每个分组包含的个体数,即分组频数.表 5-2 是排好的结果,称为频数分布或频数表.

表 5-2 XYZ 大学 100 个男生的身高

高度(英寸)	学生数
60~62	5
63~65	18
66~68	42
69~71	27
72~74	8
总数	100

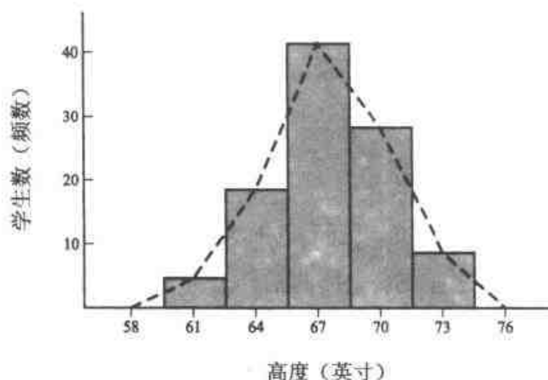


图 5-1

例如,第一个分组用 60~62 指明该组包含 60~62 英寸的身高,这称为分组区间.由于有 5 个学生的身高属于这一组,因而对应的频数是 5.由于实践上 59.5 和 60.5 之间的值均记录为 60 英寸,同样 61.5 至 62.5 之间的值均记为 62,这个分组区间认为是 59.5~62.5 更为恰当.下一个区间为 62.5~65.5,等等.在分组区间 59.5~62.5 中,数 59.5 和 62.5 常称为组分界点.第 j 个分组区间的宽度记为 C_j,一般全部的分组都用相同的一个数(这时记为 C),它是上组限与下组限的差.上例中 $C=62.5-59.5=3$.

分组区间的中点可以作为该组的代表值,称为组中值.表 5-2 中,分组区间 60~62 对应的组中值为 61.

频数分布可以画成一个直方图,如图 5-1 所示.也可以画成一个由直方图各顶部的中点连成的折线图(常称为频数折线).从图的形状看,来自高度总体的样本似乎指示总体是正态分布,这一点我们是很感兴趣的.

相对频率分布

如果在表 5-2 中,我们记录每个分组中学生的相对频率,即百分数,而不是学生数,这个结果称为相对频率分布或百分数频率分布.例如,组 63~65 的相对频率是 $\frac{18}{100}$ 或 18%.其对应的直方图与图 5-1 类似,除去纵轴是相对频率,而不是频数,矩形块的总面积是 1 或 100%.

相对频率分布可以考虑为一个概率分布,其中用相对频率代替了概率.由于相对频率可以看作是经验概率(参看第一章),相对频率分布大家都称为经验概率分布.

分组数据中,均值、方差和矩的计算

我用表 5-3 作为一张频数分布的代表,其中给出了每一个组中值和对应的分组频数,总的频数是 n,即

$$n=f_1+f_2+\cdots+f_k=\sum f$$

由于有 f_1 个数等于 x_1,f_2 个数等于 x_2,…,f_k 个数等于 x_k,所以均值为

$$\bar{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_kx_k}{n}=\frac{\sum fx}{n} \tag{24}$$

表 5-3

组中值	分组频数
x_1	f_1
x_2	f_2
⋮	⋮
x_k	f_k
总数	n

方差为

$$s^2=\frac{f_1(x_1-\bar{x})^2+f_2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+f_k(x_k-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{n} \tag{25}$$

注意(24)式和(25)式与第三章(2)式和(13)式类似,只是以 f_j/n 作为经验概率.

当分组区间宽度都是 C 时,对计算均值和方差有可用的简化方法,即所谓代码法.对组中值 x 做一个变换,将其对应到一个整数 u

$$x = a + cu \tag{26}$$

这里 a 是任意选择的一个组中值,该组对应到 $u=0$.计算均值和方差的代码公式为

$$\bar{x}=a+\frac{c}{n}\sum fu=a+c\bar{u} \tag{27}$$

$$s^2=c^2\left[\frac{\sum fu^2}{n}-\left(\frac{\sum fu}{n}\right)^2\right]=c^2(\overline{u^2}-\bar{u}^2) \tag{28}$$

高阶矩也有类似的公式.r 阶的中心矩(以均值为中心的矩)和原点矩分别为

$$m_r=\frac{f_1(x_1-\bar{x})^r+\cdots+f_k(x_k-\bar{x})^r}{n}=\frac{\sum f(x-\bar{x})^r}{n} \tag{29}$$

$$m'_r=\frac{f_1x_1^r+\cdots+f_kx_k^r}{n}=\frac{\sum fx^r}{n} \tag{30}$$

这两类矩有下列关系:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0\\ m_2 &= m_2'-m_1'^2\\ m_3 &= m_3'-3m_1'm_2'+2m_1'^3\\ m_4 &= m_4'-4m_1'm_3'+6m_1'^2m_2'-3m_1'^4 \end{aligned} \tag{31}$$

如果我们记

$$M_r=\frac{\sum f(u-\bar{u})^r}{n},\quad M_r'=\frac{\sum fu^r}{n}$$

其中 u 由(26)式给出,那么这些 M 间也能有(31)式那样的关系,但是

$$m_r=\frac{\sum f(x-\bar{x})^r}{n}=\frac{\sum f[(a+cu)-(a+c\bar{u})]^r}{n}=\frac{\sum fc^r(u-\bar{u})^r}{n}=c^rM_r$$

从而由(31)式可获得代码的公式:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0\\ m_2 &= c^2(M_2'-M_1'^2)\\ m_3 &= c^3(M_3'-3M_1'M_2'+2M_1'^3)\\ m_4 &= c^4(M_4'-4M_1'M_3'+6M_1'^2M_2'-3M_1'^4) \end{aligned} \tag{32}$$

当然(32)式的第二个等式与(28)式是一样的.

其他统计量,如偏度和峰度,也可用类似的方法从分组数据算出.

习题解答

均值的抽样分布

5.1 一个总体包含 5 个数 2,3,6,8,11. 考虑从此总体抽取容量为 2 的有放回样本. 求(a)总体均值,(b)总体标准差,(c)样本均值的抽样分布的均值,(d)样本均值的抽样分布的标准差.

解 (a) $$\mu = \frac{2+3+6+8+11}{5} = \frac{30}{5} = 6.0$$

(b) $$\sigma^2 = \frac{(2-6)^2+(3-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2+(11-6)^2}{5} = \frac{16+9+0+4+25}{5} = 10.8$$

且 $\sigma = 3.29$.

(c)容量为 2 的有放回样本共有 25 种可能(因为第一次取可以是 5 个数的任一个,第二次取也是 5 个数的任一个). 即有

(2,2)	(2,3)	(2,6)	(2,8)	(2,11)
(3,2)	(3,3)	(3,6)	(3,8)	(3,11)
(6,2)	(6,3)	(6,6)	(6,8)	(6,11)
(8,2)	(8,3)	(8,6)	(8,8)	(8,11)
(11,2)	(11,3)	(11,6)	(11,8)	(11,11)

对应的样本均值分别是

(1)

2.0	2.5	4.0	5.0	6.5
2.5	3.0	4.5	5.5	7.0
4.0	4.5	6.0	7.0	8.5
5.0	5.5	7.0	8.0	9.5
6.5	7.0	8.5	9.5	11.0

因此样本均值的抽样分布的均值为

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{(1)\text{ 中全部样本均值的总和}}{25} = \frac{150}{25} = 6.0$$

这说明事实上有 $\mu_{\bar{X}} = \mu$,其一般证明参见习题 5.6.

(d)样本均值抽样分布的方差 $\sigma_{\bar{X}}^2$,可以从(1)中的每一个数减去均值 6,再平方,将 25 个数加在一起除以 25 即得. 结果为

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{135}{25} = 5.40, \quad \text{故} \quad \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{5.40} = 2.32$$

这说明对有放回抽样的有限总体(或无限总体),有 $\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma^2/n$,右侧正好是 $10.8/2 = 5.40$,与上述结果一致. 一般的证明参见习题 5.7.

5.2 如果抽样是无放回的,解习题 5.1.

解 (a),(b)和习题 5.1 一样,$\mu = 6$,而 $\sigma^2 = 10.8$, $\sigma = 3.29$.

(c)容量为 2 的无放回抽样共有 ${}_5C_2 = 10$ 种(这意味着抽一个数,然后再抽另一个与前一个不同的数),即

(2,3),(2,6),(2,8),(2,11),(3,6),(3,8),(3,11),(6,8),(6,11),(8,11)

作为例子,选择(2,3)同样也考虑为(3,2). 他们对应的样本均值是

2.5,4.0,5.0,6.5,4.5,5.5,7.0,7.0,8.5,9.5

故样本均值的抽样分布的均值为

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{2.5+4.0+5.0+6.5+4.5+5.5+7.0+7.0+8.5+9.5}{10} = 6.0$$

这也说明了事实 $\mu_{\bar{X}} = \mu$.

(d)样本均值的抽样分布的方差为

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{(2.5-6.0)^2+(4.0-6.0)^2+(5.0-6.0)^2+\cdots+(9.5-6.0)^2}{10} = 4.05$$

且 $\sigma_{\bar{X}} = 2.01$.

这说明 $\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$，右边为$\frac{10.8}{2}\left(\frac{5-2}{5-1}\right)=4.05$，正是前面的结果.一般的证明参见习题 5.47.

5.3 假定一个大学中 3 000 个男生的身高遵从正态分布，均值为 68.0 英寸，标准差为 3.0 英寸.如果有 80 个样本，每一样本包含 25 个学生，在下列情形讨论所得样本均值的平均值和标准差，(a)有放回样本，(b)无放回样本.

解 ☞ 从 3 000 个一群的学生中取容量 25 的样本，理论上可获得样本总个数，有放回为$(3\ 000)^{25}$，无放回为${}_{3\ 000}C_{25}$，它们远大于 80.因此，我们无法得到真的样本均值的抽样分布，仅能得到经验的抽样分布.虽然如此，由于样本个数也相当大，两个抽样分布应可认为比较接近.因此，80 个样本均值的平均值和标准差应与理论分布的相应值接近.所以有

(a) $$\mu_{\bar{X}}=\mu=68.0\text{ 英寸}\quad 且\quad \sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{3}{\sqrt{25}}=0.6\text{ 英寸}$$

(b) $$\mu_{\bar{X}}=\mu=68.0\text{ 英寸}\quad 且\quad \sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=\frac{3}{\sqrt{25}}\sqrt{\frac{3\ 000-25}{3\ 000-1}}$$

最后一式只比 0.6 英寸稍小一点，对一切实际问题都可认为与有放回抽样是一样的.

再进一步，我们应可期望样本均值的经验抽样分布接近均值为 68.0 英寸、标准差为 0.6 英寸的正态分布.

5.4 在习题 5.3 的样本中，我们能期望有多少样本其均值(a)在 66.8 至 68.3 英寸之间，(b)小于 66.4 英寸.

解 ☞ 一个样本的均值 $\bar{X}$ 化成标准单位为

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}=\frac{\bar{X}-68.0}{0.6}$$

(a)
66.8 在标准单位中 $=(66.8-68.0)/0.6=-2.0$
68.3 在标准单位中 $=(68.3-68.0)/0.6=0.5$
均值处于 66.8 至 68.3 英寸间样本的比例
=(正态曲线下 $Z=-2.0$ 至 $Z=0.5$ 间的面积)
=($Z=-2$ 至 $Z=0$ 间面积)+($Z=0$ 至 $Z=0.5$ 间面积)
$=0.4772+0.1915=0.6687$
期望的样本数 $=80\times0.6687$ 或 53(见图 5-2)

(b)
66.4 在标准单位中 $=(66.4-68.0)/0.6=-2.67$
均值小于 66.4 英寸的样本的比例
=(正态曲线下 $Z=-2.67$ 左边的面积)
=($Z=0$ 左边面积)−($Z=-2.67$ 至 $Z=0$ 间面积)
$=0.5-0.4962=0.0038$
期望的样本数 $=80\times0.0038=0.304$ 或 0(见图 5-3)

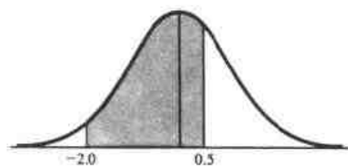


图 5-2

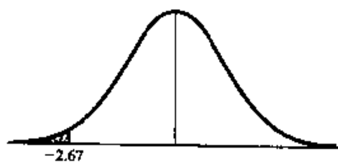


图 5-3

5.5 500 个球轴承的平均重量为 5.02 盎司、标准差为 0.30 盎司.从中选取 100 个球轴承的随机样本，求合在一起重量在下列数的概率：(a)在 496 至 500 盎司之间，(b)大于 510 盎司.

解 ☞ 对样本均值的抽样分布，$\mu_{\bar{X}}=\mu=5.02$ 盎司

$$\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=\frac{0.30}{\sqrt{100}}\sqrt{\frac{500-100}{500-1}}=0.027$$

(a)如果 100 个球轴承的平均重量在 4.96 至 5.00 盎司间,则合在一起重量在 496 至 500 盎司之间(见图 5-4):

$$4.96\text{ 在标准单位中} = \frac{4.96-5.02}{0.027} = -2.22$$

$$5.00\text{ 在标准单位中} = \frac{5.00-5.02}{0.027} = -0.74$$

所求概率 $= (Z=-2.22$ 至 $Z=-0.74$ 间面积)

$= (Z=-2.22$ 至 $Z=0$ 间面积$) - (Z=-0.74$ 至 $Z=0$ 间面积)

$= 0.4868 - 0.2704 = 0.2164$

(b)如果 100 个球轴承平均重量超过 5.10 盎司,则合在一起重量超过 510 盎司(见图 5-5)

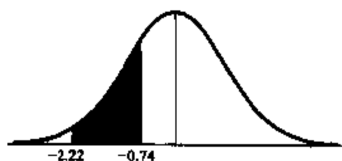


图 5-4

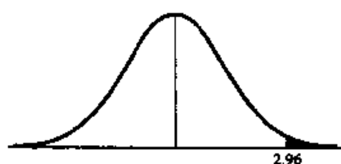


图 5-5

$$5.10\text{ 在标准单位中} = \frac{5.10-5.02}{0.027} = 2.96$$

所求概率 $= (Z=2.96$ 右边面积)

$= (Z=0$ 右边面积$) - (Z=0$ 至 $Z=2.96$ 间面积)

$= 0.5 - 0.4985 = 0.0015$

因此取 100 个球轴承的样本,在 2000 次抽取中大概仅有 3 次总重量超过 510 盎司.

5.6　证明定理 5-1.

证明　☞ 由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是随机变量,有相同的总体分布,有均值 μ,故有

$$E(X_k) = \mu, \quad k = 1,2,\cdots,n$$

样本均值定义为

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

从而有所求的

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}[E(X_1) + \cdots + E(X_n)] = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$$

5.7　证明定理 5-2.

证明　☞ 我们有

$$\overline{X} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \cdots + \frac{X_n}{n}$$

由于 $X_1, \cdots, X_n$ 独立,有方差 σ^2,利用定理 3-5 和 3-7,有

$$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_n) = n\left(\frac{1}{n^2}\sigma^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

比例的抽样分布

5.8　掷一枚均匀硬币 120 次,求下列概率:(a)40%至 60%之间为正面,(b)$\frac{5}{8}$或更多是正面.

解　☞ 将 120 次投掷考虑为一均匀硬币可能的投掷的无限总体的一个样本.在此总体中正面出现的概率 $p=\frac{1}{2}$,反面出现的概率 $q=1-p=\frac{1}{2}$.

(a)120 的 40% 为 48,120 的 60% 为 72,所求的是 120 次投掷中正面数在它们之间的概率.如第四章所

做的那样，对二项分布使用正态近似．由于正面数是离散变量，我们求此数在 47.5 至 72.5 之间的概率(见图 5-6)．

$$\mu = \text{期望的正面数} = np = 120\left(\frac{1}{2}\right) = 60$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(120)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 5.48$$

$$47.5\text{在标准单位中} = \frac{47.5-60}{5.48} = -2.28$$

$$72.5\text{在标准单位中} = \frac{72.5-60}{5.48} = 2.28$$

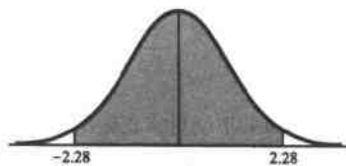


图 5-6

所求概率 =(正态曲线下 $Z=-2.28$ 至 $Z=2.28$ 间面积)

$=2(Z=0$ 至 $Z=2.28$ 间面积)

$=2(0.4887)=0.9774$

另解

$$\mu_P = p = \frac{1}{2} = 0.50,\quad \sigma_P = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{120}} = 0.0456$$

$$40\%\ \text{在标准单位中} = \frac{0.40-0.50}{0.0456} = -2.19$$

$$60\%\ \text{在标准单位中} = \frac{0.60-0.50}{0.0456} = 2.19$$

因此，所求概率是正态曲线下 $Z=-2.19$ 至 $Z=2.19$ 间的面积，即 $2(0.4857)=0.9714$．

虽然这个结果对两位有效数是准确的，由于比例实际上是离散变量，造成两者并不完全一致．考虑这一问题，可以从 40% 减去$\frac{1}{2n}=\frac{1}{2(120)}$，从 60% 加上$\frac{1}{2n}=\frac{1}{2(120)}$，$\frac{1}{240}=0.00417$，因此所要求的比例在标准单位中的值为

$$\frac{0.40-0.00417-0.50}{0.0456} = -2.28 \text{ 和 } \frac{0.60+0.00417-0.50}{0.0456} = 2.28$$

这样会看到和第一种方法一致．

注意$(0.40-0.00417)$和$(0.60+0.00417)$对应到第一个方法中的比例 47.5/120 和 72.5/120．

(b)使用(a)的第二种方法，由于$\frac{5}{8}=0.6250$，有

$$(0.6250-0.00417)\ \text{在标准单位中} = \frac{0.6250-0.00417-0.50}{0.0456} = 2.65$$

所求概率 =(正态曲线下 $Z=2.65$ 右边的面积)

$=(Z=0$ 右边面积$)-(Z=0$ 至 $Z=2.65$ 间面积)

$=0.5-0.4960=0.0040$

5.9 有 500 人，每人掷一枚均匀硬币 120 次，有多少人可以期望获得：(a)他掷出的正面在 40%至 60%之间，(b)他掷出的正面超过$\frac{5}{8}$．

解 本题与习题 5.8 紧密相连，这里考虑有 500 个样本，每个的容量为 120，它们是来自硬币的一切可能投掷的无限总体．

(a)习题 5.8 的(a)中说明包含 120 次投掷的样本，正面出现的百分数在 40%至 60%间可以期望有 97.74%．在 500 个样本中可以期望大约有 500 的 97.74%，即 489 有这样的性质．这就是说大约 489 人可以期望他们的试验产生的正面在 40%至 60%之间．

注意到 $500-489=11$ 人将会报告其正面出现的百分数不在 40%至 60%之间，这些人有理由认为他们的硬币受到处理，甚至怀疑硬币的匀称性，这种类型的错误是一种风险，当我们用概率处理问题时，总会有风险．

(b)按(a)中的理由，我们认为大约 $500\times0.0040=2$ 人将会报告他们的投掷结果正面超过$\frac{5}{8}$．

5.10 某一机器制造一种工具，已知 2%是次品．在一批 400 个这种工具中求下列概率：(a)次品多于 3%，(b)次品少于 2%．

解 ☞ $\mu_P = p = 0.02, \sigma_P = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.02 \times 0.98}{400}} = \frac{0.14}{20} = 0.007$

(a)使用离散变量的修正 $1/2n = 1/800 = 0.00125$，有

$$(0.03 - 0.00125) \text{ 在标准单位中 } = \frac{0.03 - 0.00125 - 0.02}{0.007} = 1.25$$

$$\text{所求概率} = (\text{正态分布下 } Z = 1.25 \text{ 右边面积}) = 0.1056$$

如果不使用修正则结果为 0.0764.

另解　(400 的 3%) = 12 个次品. 按连续的修止，则 12 个或更多个工具意味着 11.5 个或更多个.

$$\mu = (400 \text{ 的 } 2\%) = 8, \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{400 \times 0.02 \times 0.98} = 2.8$$

然后

$$11.5 \text{ 在标准单位中} = (11.5 - 8)/2.8 = 1.25$$

则可得到前面求出的概率 0.1056.

(b)

$$(0.02 + 0.00125) \text{在标准单位} = \frac{0.02 + 0.00125 - 0.02}{0.007} = 0.18$$

$$\text{所求概率} = (\text{正态曲线下 } Z = 0.18 \text{ 左边面积})$$
$$= 0.5000 + 0.0714 = 0.5714$$

如果不作修正，结果将是 0.5000. 也可使用(a)中的第二种方法.

5.11　选举回答显示某一候选人获得选票的 46%，现从投票人总体中随机抽取下列人数，求此选举人群中选票的大多数选该候选人的概率：(a)200 人，(b)1 000 人.

解 ☞ (a)$\mu_P = p = 0.46, \sigma_P = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.46 \times 0.54}{200}} = 0.0352$，又 $1/2n = 1/400 = 0.0025$，如果选该候选人的比例是 $0.50 + 0.0025 = 0.5025$ 或更多，则是样本中的大多数(这个比例也可用 101 或更多来说明大多数而得出，但对应一个连续变量 100.5，故比例是 $100.5/200 = 0.5025$).

$$0.5025 \text{ 在标准单位中 } = (0.5025 - 0.46)/0.0352 = 1.21$$

因此

$$\text{所求概率} = (\text{正态曲线下 } Z = 1.21 \text{ 右边面积})$$
$$= 0.5000 - 0.3869 = 0.1131$$

(b)

$$\mu_P = p = 0.46, \sigma_P = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(0.46)(0.54)}{1000}} = 0.0158$$

$$0.5025 \text{ 在标准单位中 } = \frac{0.5025 - 0.46}{0.0158} = 2.69$$

$$\text{所求概率} = (\text{正态曲线下 } Z = 2.69 \text{ 右边面积})$$
$$= 0.5000 - 0.4964 = 0.0036$$

差与和的抽样分布

5.12　设 U_1 是一个变量，可以是总体 3,7,8 的任一个元素. U_2 是一个变量，可以是总体 2,4 的任一个元素. 计算(a)μ_{U_1}，(b)μ_{U_2}，(c)$\mu_{U_1 - U_2}$，(d)σ_{U_1}，(e)σ_{U_2}，(f)$\sigma_{U_1 - U_2}$.

解 ☞ (a)μ_{U_1} = 总体 U_1 的均值 $= \frac{1}{3}(3 + 7 + 8) = 6$

(b)μ_{U_2} = 总体 U_2 的均值 $= \frac{1}{2}(2 + 4) = 3$

(c)总体包含 U_1 的任一数与 U_2 的任一数之差，它是

$$\begin{matrix} 3-2 & 7-2 & 8-2 \\ 3-4 & 7-4 & 8-4 \end{matrix} \quad \text{或} \quad \begin{matrix} 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{matrix}$$

所以

$$\mu_{U_1 - U_2} = (U_1 - U_2)\text{的均值} = \frac{1 + 5 + 6 + (-1) + 3 + 4}{6} = 3$$

这说明了一般结果 $\mu_{U_1 - U_2} = \mu_{U_1} - \mu_{U_2}$(参看(a)和(b)).

(d)

$$\sigma_{U_1}^2 = \text{总体 } U_1 \text{ 的方差} = \frac{(3-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\sigma_{U_1} = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

(e)
$$\sigma_{U_2}^2 = \text{总体 } U_2 \text{ 的方差} = \frac{(2-3)^2+(4-3)^2}{2} = 1$$
$$\sigma_{U_2} = 1$$

(f)
$$\sigma_{U_1-U_2}^2 = \text{总体}(U_1-U_2)\text{的方差}$$
$$= \frac{(1-3)^2+(5-3)^2+(6-3)^2+(-1-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2}{6} = \frac{17}{3}$$
$$\sigma_{U_1-U_2} = \sqrt{\frac{17}{3}}$$

这说明了独立样本的一般结果，$\sigma_{U_1-U_2} = \sqrt{\sigma_{U_1}^2+\sigma_{U_2}^2}$（参看(d)和(e)）. 一般结果的证明见第三章定理 3-7.

5.13　生产者 A 的电灯泡有平均寿命 1 400 小时，标准差 200 小时；生产者 B 的灯泡有平均寿命 1 200 小时，标准差 100 小时. 如果一个测试板随机测试 125 个灯泡的样本. 求下列概率：(a)测试 A 灯泡的板比测试 B 灯泡的板的平均寿命至少长 160 小时的概率，(b)A 灯泡板比 B 灯泡板平均寿命长 250 小时以上的概率.

解答　设 $\overline{X}_A$ 和 $\overline{X}_B$ 分别记 A 和 B 样本的平均寿命，则

$$\mu_{\overline{X}_A-\overline{X}_B} = \mu_{\overline{X}_A} - \mu_{\overline{X}_B} = 1400-1200 = 200 \text{ 小时}$$
$$\sigma_{\overline{X}_A-\overline{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{(200)^2}{125}+\frac{(100)^2}{125}} = 20 \text{ 小时}$$

样本均值的差的标准化变量为

$$Z = \frac{(\overline{X}_A-\overline{X}_B)-(\mu_{\overline{X}_A-\overline{X}_B})}{\sigma_{\overline{X}_A-\overline{X}_B}} = \frac{(\overline{X}_A-\overline{X}_B)-200}{20}$$

它非常接近正态分布.

(a)　差 160 在标准单位中 $=(160-200)/20=-2$

所求概率 =（正态曲线下 $Z=-2$ 右边面积）

$=0.5000+0.4772=0.9772$

(b)　差 250 在标准单位中 $=(250-200)/20=2.50$

所求概率 =（正态曲线下 $Z=2.50$ 右边面积）

$=0.5000-0.4938=0.0062$

5.14　一种品牌的球轴承重 0.50 盎司，标准差为 0.02 盎司，1 000 个作为一组，求如此的两组轴承重量之差超过 2 盎司的概率.

解答　设 $\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$ 记两组球轴承重量的平均值，则

$$\mu_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \mu_{\overline{X}_1} - \mu_{\overline{X}_2} = 0.50-0.50 = 0$$
$$\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n}} = \sqrt{\frac{(0.02)^2}{1\,000}+\frac{(0.02)^2}{1\,000}} = 0.000895$$

平均值之差的标准化变量 $Z=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-0}{0.000895}$ 是非常近似正态分布的.

组间有 2 盎司的差等价于平均值间有 2/1 000 = 0.002 盎司的差. 当 $\overline{X}_1-\overline{X}_2 \geqslant 0.002$ 或 $\overline{X}_1-\overline{X}_2 \leqslant -0.002$ 时，就出现这一情况，即

$$Z \geqslant \frac{0.002-0}{0.000895} = 2.23 \quad \text{或} \quad Z \leqslant \frac{-0.002-0}{0.00895} = -2.23$$

所以

$$P(Z\geqslant 2.23 \text{ 或 } Z\leqslant -2.23) = P(Z\geqslant 2.23)+P(Z\leqslant -2.23)$$
$$=2(0.5000-0.4871) = 0.0258$$

5.15　A 与 B 玩掷硬币游戏，每人掷 50 枚硬币. 如果 A 的投掷比 B 的投掷出现的正面多 5 个或以上则 A 赢，否则 B 赢. 确定在一次游戏中相对 A 获胜的优势比.

解答　设 P_A 和 P_B 记 A 和 B 出现正面的比例. 假定硬币是均匀的，正面出现的概率 p 是 $\frac{1}{2}$. 故

$$\mu_{P_A-P_B}=\mu_{P_A}-\mu_{P_B}=0$$

$$\sigma_{P_A-P_B}=\sqrt{\sigma_{P_A}^2+\sigma_{P_B}^2}=\sqrt{\frac{pq}{n_A}+\frac{pq}{n_B}}=\sqrt{\frac{2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{50}}=0.10$$

比例差的标准化变量 $Z=(P_A-P_B-0)/0.10$.

按连续变量的修正，5 或更多意味着 4.5 或更多，所以两个比例的差应是 $4.5/50=0.09$ 或更多，也就是 Z 大于或等于 $(0.09-0)/0.10=0.9$(或 $Z\geqslant 0.9$). 这个概率是正态曲线下 $Z=0.9$ 右边的面积，它是 $0.5000-0.3159=0.1841$.

因此相对 A 获胜的优势比是 $(1-0.1841):0.1841=0.8159:0.1841$ 或 4.43 比 1.

5.16　两个距离分别测量为长 27.3 英寸和 15.6 英寸，相应的标准差为 0.16 英寸和 0.08 英寸. 确定它们的下列量的均值和标准差，(a)和，(b)差.

解　用 D_1 和 D_2 记两个距离，则

(a)
$$\mu_{D_1+D_2}=\mu_{D_1}+\mu_{D_2}=27.3+15.6=42.9\text{ 英寸}$$
$$\sigma_{D_1+D_2}=\sqrt{\sigma_{D_1}^2+\sigma_{D_2}^2}=\sqrt{0.16^2+0.08^2}=0.18\text{ 英寸}$$

(b)
$$\mu_{D_1-D_2}=\mu_{D_1}-\mu_{D_2}=27.3-15.6=11.7\text{ 英寸}$$
$$\sigma_{D_1-D_2}=\sqrt{\sigma_{D_1}^2+\sigma_{D_2}^2}=\sqrt{0.16^2+0.08^2}=0.18\text{ 英寸}$$

5.17　一种型号的电灯泡有平均寿命 1 500 小时，标准差 150 小时，令 3 个灯泡组合在一起，当一个烧坏时，另外的接替继续工作. 假定寿命服从正态分布. 求灯组下列事件发生的概率. (a)至少用 5 000 小时，(b)至多用 4 200 小时.

解　记灯泡寿命为 L_1, L_2 和 L_3，则

$$\mu_{L_1+L_2+L_3}=\mu_{L_1}+\mu_{L_2}+\mu_{L_3}=1\,500+1\,500+1\,500=4\,500\text{ 小时}$$
$$\sigma_{L_1+L_2+L_3}=\sqrt{\sigma_{L_1}^2+\sigma_{L_2}^2+\sigma_{L_3}^2}=\sqrt{3(150)^2}=260\text{ 小时}$$

(a)　5 000 小时在标准单位中 $=(5\,000-4\,500)/260=1.92$

所求概率 = (正态曲线下 $Z=1.92$ 右边面积)

$=0.5000-0.4726=0.0274$

(b)　4 200 小时在标准单位中 $=(4200-4500)/260=-1.15$

所求概率 = (正态曲线下 $Z=-1.15$ 左边面积)

$=0.5000-0.3749=0.1251$

方差的抽样分布

5.18　继续习题 5.1，求(a)方差抽样分布的均值，(b)方差抽样分布的标准差.

解　(a)在习题 5.1 中，25 个样本的对应的样本方差为

0	0.25	4.00	9.00	20.25
0.25	0	2.25	6.25	16.00
4.00	2.25	0	1.00	6.25
9.00	6.25	1.00	0	2.25
20.25	16.00	6.25	2.25	0

方差的抽样分布的均值为

$$\mu_{S^2}=\frac{\text{上述全部方差值之和}}{25}=\frac{135}{25}=5.40$$

这一事实表明 $\mu_{S^2}=(n-1)\sigma^2/n$，其中 $n=2$, $\sigma^2=10.8$(参看习题 5.1(b))，即 $\frac{1}{2}(10.8)=5.4$.

这一结果指明为什么常用的修正的样本方差定义为 $\hat{S}^2=\frac{n}{n-1}S^2$，这样 $\mu_{\hat{S}^2}=\sigma^2$.

(b)方差的抽样分布的方差 $\sigma_{S^2}^2$ 可从上面的表获得，从 25 个数的每一个，减去均值 5.40，平方再相加后用 25 去除即得，因此

$$\sigma_{S^2}^2 = 575.75/25 = 23.03 \quad 或 \quad \sigma_{S^2} = 4.80$$

5.19 如果抽样是无放回的,解习题 5.18.

解 (a)共有 10 种可能样本,它们的方差是习题 5.18(a)的表中对角线上方(或下方)的那些数,故

$$\mu_{S^2} = \frac{0.25 + 4.00 + 9.00 + 20.25 + 2.25 + 6.25 + 16.00 + 1.00 + 6.25 + 2.25}{10} = 6.75$$

这是一般结果 $\mu_{S^2} = \left(\frac{N}{N-1}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2$ 的特殊情况(参见本章(19)式),取 $N=5, n=2, \sigma^2=10.8$,即可得 $\mu_{S^2} = \left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(10.8) = 6.75$.

(b)从习题 5.18(a)的表对角线上方的 10 个数中各减 6.75,平方相加后再除以 10,即得

$$\sigma_{S^2}^2 = 39.675 \quad 或 \quad \sigma_{S^2} = 6.30$$

5.20 证明 $E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$,其中 S^2 是容量为 n 的随机样本的样本方差(如前面所定义),σ^2 为总体方差.

证明 方法 1 有

$$X_1 - \overline{X} = X_1 - \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}[(n-1)X_1 - X_2 - \cdots - X_n]$$

$$= \frac{1}{n}[(n-1)(X_1 - \mu) - (X_2 - \mu) - \cdots - (X_n - \mu)]$$

从而

$$(X_1 - \overline{X})^2 = \frac{1}{n^2}[(n-1)^2(X_1 - \mu)^2 + (X_2 - \mu)^2 + \cdots + (X_n - \mu)^2 + 交叉乘积项]$$

由于 X 间是独立的,每一个交叉乘积项的期望都是 0,故有

$$E[(X_1 - \overline{X})^2] = \frac{1}{n^2}\{(n-1)^2E[(X_1 - \mu)^2] + E[(X_2 - \mu)^2] + \cdots + E[(X_n - \mu)^2]\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\{(n-1)^2\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\{(n-1)^2\sigma^2 + (n-1)\sigma^2\} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

类似地,$E[(X_k - \overline{X})^2] = (n-1)\sigma^2/n$,当 $k = 2, \cdots, n$.因此

$$E(S^2) = \frac{1}{n}E[(X_1 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{n-1}{n}\sigma^2 + \cdots + \frac{n-1}{n}\sigma^2\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

方法 2 有

$$X_j - \overline{X} = (X_j - \mu) - (\overline{X} - \mu).$$

故

$$(X_j - \overline{X})^2 = (X_j - \mu)^2 - 2(X_j - \mu)(\overline{X} - \mu) + (\overline{X} - \mu)^2$$

以及

$$(1) \qquad \sum(X_j - \overline{X})^2 = \sum(X_j - \mu)^2 - 2(\overline{X} - \mu)\sum(X_j - \mu) + \sum(\overline{X} - \mu)^2$$

这里和号是从 1 到 n.由于 $\sum(X_j - \mu) = \sum X_j - n_\mu = n(\overline{X} - \mu)$,上式可以写成

$$(2) \qquad \sum(X_j - \overline{X})^2 = \sum(X_j - \mu)^2 - 2n(\overline{X} - \mu)^2 + n(\overline{X} - \mu)^2$$

$$= \sum(X_j - \mu)^2 - n(\overline{X} - \mu)^2$$

对(2)的两侧取期望,并使用习题 5.7,则得

$$E[\sum(X_j - \overline{X})^2] = E[\sum(X_j - \mu)^2] - nE[(\overline{X} - \mu)^2]$$

$$= n\sigma^2 - n\left(\frac{\sigma^2}{n}\right) = (n-1)\sigma^2$$

因此

$$E(S^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

5.21 证明定理 5-4.

证明 ☞ 设 $X_j, j=1,2,\cdots,n$ 有正态分布,均值为 μ,方差为 σ^2,它们的特征函数为(参看第四章表 4-2)

$$\phi_j(\omega)=e^{i\mu\omega-(\sigma^2\omega^2)/2}$$

由定理 3-12 及 X 间的独立性,得 $X_1+X_2+\cdots+X_n$ 的特征函数

$$\phi(\omega)=\phi_1(\omega)\phi_2(\omega)\cdots\phi n(\omega)=e^{in\mu\omega-(n\sigma^2\omega^2)/2}$$

再由定理 3-11,得 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ 的特征函数为

$$\phi_{\overline{X}}(\omega)=\phi\left(\frac{\omega}{n}\right)=e^{i\mu\omega-[(\sigma^2/n)\omega^2]/2}$$

但这是期望为 μ、方差为 σ^2/n 的正态分布的特征函数,由定理 3-13 即得要求的结果.

5.22 证明定理 5-6.

证明 ☞ 由定义有$(n-1)\hat{S}^2=\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2$,从习题 5.20 中方法 2 的(2),有 $V=V_1+V_2$,其中

$$V=\sum_{j=1}^{n}\frac{(X_j-\mu)^2}{\sigma^2},\quad V_1=\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2},\quad V_2=\frac{(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2/n}$$

现在由第四章定理 4-3,V 有 n 个自由度的卡方分布(用$(X_j-\mu)/\sigma$ 代替定理中 X_j).同时由习题 5.21,$\overline{X}$ 遵从期望为μ、方差为 σ^2/n 的正态分布.因此用$(\overline{X}-\mu)/\sqrt{\sigma^2/n}$代替$X_1$ 就成为定理 4-3 中 $\nu=1$ 的情形,所以 V_2 是自由度为 1 的卡方分布.如果 V_1 和 V_2 相互独立,则由第四章定理 4-5 即得,V_1 是 $n-1$ 自由度的卡方分布,而且确实能够说明 V_1 和 V_2 是独立的,这样就得到所求结论.

5.23 (a)使用定理 5-6,确定习题 5.1 中样本方差大于 7.2 的样本的期望数目,(b)用实际值检查(a)中的结果.

解 ☞ (a)我们有 $n=2,\sigma^2=10.8$(看习题 5.1(b)),对 $s_1^2=7.2$ 有

$$\frac{ns_1^2}{\sigma^2}=\frac{2(7.2)}{10.8}=1.33$$

根据定理 5-6,$\chi^2=nS^2/\sigma^2=2S^2/10.8$ 服从自由度为 1 的卡方分布.从附录 E 中的表可得

$$P(S^2\geqslant s_1^2)=P(\chi^2\geqslant 1.33)=0.25$$

因此,我们可期望 25% 的样本,即 6 个样本的方差大于 7.2.

(b)从习题 5.18 的计算可以看到,确实有 6 个方差比 7.2 大,结论是一致的.

总体方差未知的情形

5.24 证明定理 5-7.

证明 ☞ 设 $Y=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}, Z=\frac{nS^2}{\sigma^2}, \nu=n-1$,由于 X_j 服从期望 μ、方差 σ^2 的正态分布,我们知道(习题 5.21)$\overline{X}$ 是期望μ、方差 σ^2/n 的正态分布,所以 Y 服从期望 0、方差 1 的正态分布,同时由本章定理 5-6 或习题 5.22,Z 是$\nu=n-1$ 个自由度的卡方分布,而且能够说明 Y 和 Z 是独立的.

从第四章定理 4-6,即得

$$T=\frac{Y}{\sqrt{Z/\nu}}=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}=\frac{\overline{X}-\mu}{\hat{S}/\sqrt{n}}$$

有 $n-1$ 个自由度的 t 分布.

5.25 根据 1 个自由度的学生氏 t 分布表(附录 D),有 $P(-1.376\leqslant T\leqslant 1.376)=0.60$.核查一下它是否与习题 5.1 中的结果吻合.

解 ☞ 从习题 5.1 的(1)中 $\overline{X}$ 的值和习题 5.18(a)中 S^2 的值,可以得到 $T=(\overline{X}-\mu)/(S/\sqrt{1})$的值

$-\infty$	-7.0	-1.0	-0.33	0.11
-7.0	$-\infty$	-1.0	-0.20	0.25
-1.0	-1.0	$\cdots$	1.0	1.0
-0.33	-0.20	1.0	∞	2.33
0.11	0.25	1.0	2.33	∞

实际存在 16 个值满足 $-1.376 \leqslant T \leqslant 1.376$，而我们的期望数为 $(0.60)(25)=15$. 考虑到数据量比较小，这一结果不算太坏. 实际上，这里的抽样方法就是当初"学生氏"获得 t 分布的途径.

方差比的抽样分布

5.26 证明定理 5-8.

证明 ☞ 分别用 $X_1,\cdots,X_m$ 和 $Y_1,\cdots,Y_n$ 记容量为 m 和 n 的样本. 样本方差为

$$S_1^2=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(X_j-\overline{X})^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2$$

其中 $\overline{X},\overline{Y}$ 是样本均值.

现在从本章定理 5-6，知 mS_1^2/σ_1^2 和 nS_2^2/σ_2^2 分别服从 $m-1$ 和 $n-1$ 自由度卡方分布. 因此由第四章定理 4-7，有

$$F=\frac{mS_1^2/(m-1)\sigma_1^2}{nS_2^2/(n-1)\sigma_2^2}=\frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2}$$

服从 $m-1,n-1$ 自由度的 F 分布.

5.27 有两个正态总体，方差分别为 20 和 36，分别抽取容量为 8 和 10 的样本. 求第一个样本方差超过第二个样本方差两倍的概率.

解 ☞ 有 $m=8,n=10,\sigma_1^2=20,\sigma_2^2=36$，因此

$$F=\frac{8S_1^2/(7)(20)}{10S_2^2/(9)(36)}=1.85\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

分子和分母自由度的数目为 $\nu_1=m-1=7,\nu_2=n-1=9$. 现在如果 S_1^2 比 S_2^2 大两倍，即 $S_1^2>2S_2^2$，则 $F>3.70$. 查附录 F 表，看到其概率小于 0.05 但大于 0.01. 要获得精确的值则需更大的 F 分布表.

频数分布

5.28 表 5-4 记录了州立大学 40 名男生的体重(磅)，用它构成一频率分布.

表 5-4

138	164	150	132	144	125	149	157
146	158	140	147	136	148	152	144
168	126	138	176	163	119	154	165
146	173	142	147	135	153	140	135
161	145	135	142	150	156	145	128

解 ☞ 其中最大重量是 176 磅，最小是 119 磅，差程为 $176-119=57$ 磅.

如果 5 个组，每组区间约长 $57/5=11$；如果 20 个组，每组区间约长 $57/20=3$.

组区间长选为 5 更为适宜，同时组中值选为 120, 125, 130, 135, 等磅更方便. 因此，分组采用 118～122, 123～127, 128～132. 等等，这时分组限为 117.5, 122.5, 127.5, 等等，它们与观测数不会相重.

所求的频数分布列在表 5-5 中，中间的一列称为筹码、计点或划杠，用于从原始数据列出分组频数，通常在频数分布的最后表示中都会省略掉.

表 5-5

重量(磅)	筹码	频数
118～122	/	1
123～127	//	2
128～132	//	2
133～137	////	4
138～142	卌 /	6
143～147	卌 ///	8
148～152	卌	5
153～157	////	4
158～162	//	2
163～167	///	3
168～172	/	1
173～177	//	2
	总和	40

表 5-6

重量(磅)	筹码	频数
118～126	///	3
127～135	卌	5
136～144	卌 ////	9
145～153	卌 卌 //	12
154～162	卌	5
163～171	////	4
172～180	//	2
	总和	40

当然还可以有其他的频率分布,如表 5-6 它显示了一个仅有 7 个分组的频率分布,其组区间长为 9 磅.

5.29 对习题5.28中重量分布画直方图和频数折线.

解 习题 5.28 中考虑的两个情形的直方图和频数折线给在图 5-7 和图 5-8 中,注意长方形底边的中点在组中值处.

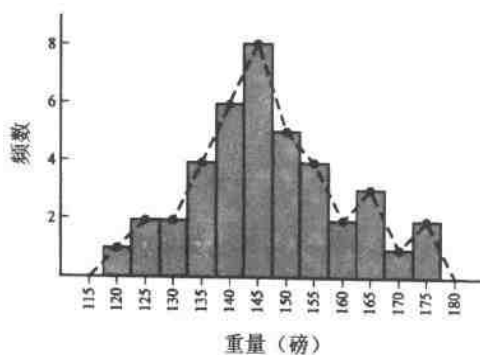


图 5-7

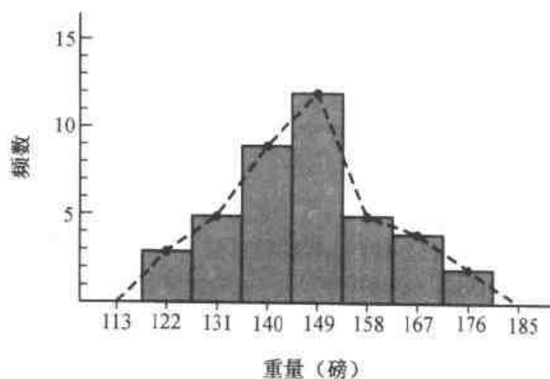


图 5-8

5.30 同时掷 5 枚硬币 1 000 次,记录每次投掷中正面的个数,正面个数为 0,1,2,3,4,5 的投掷次数列在表 5-7 中,图形表示这些资料.

解 资料可以图形显示在图 5-9 或图 5-10 中.图 5-9 似乎是更自然的使用,一个原因是正面数不能是 1.5 或 3.2.这个图是一个竖线图形式,竖线的宽是零,它有时称为标尺图.当数据是离散的时常被使用.

表 5-7

正面数	投掷次数 (频数)
0	38
1	144
2	342
3	287
4	164
5	25
总数	1 000

图 5-10 显示的是数据的直方图.直方图的总面积是总的频数 1 000,如图所示.

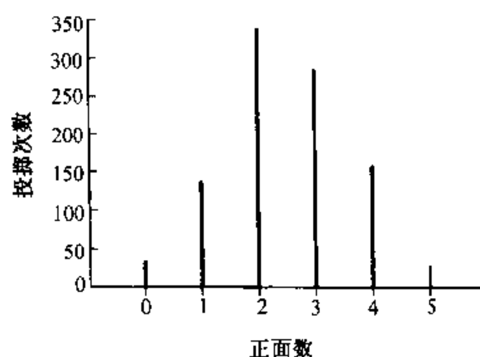


图 5-9

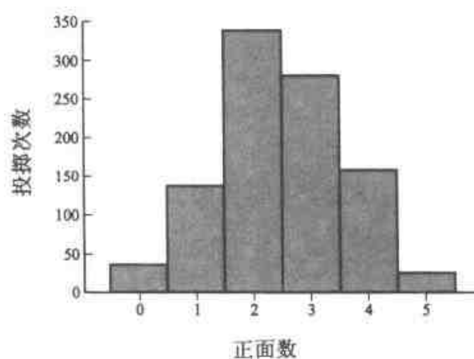


图 5-10

样本均值、方差、矩的计算

5.31 求数 5,3,6,5,4,5,2,8,6,5,4,8,3,4,5,4,8,2,5,4 的算术平均.

解 ☞ 方法 1

$$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{5+3+6+5+4+5+2+8+6+5+4+8+3+4+5+4+8+2+5+4}{20}$$

$$=\frac{96}{20}=4.8$$

方法 2 有 6 个 5,2 个 3,2 个 6,5 个 4,2 个 2 和 3 个 8,所以

$$\bar{x}=\frac{\sum fx}{n}=\frac{6\times5+2\times3+2\times6+5\times4+2\times2+3\times8}{6+2+2+5+2+3}=\frac{96}{20}=4.8$$

5.32 4 群学生,分别包含 15,20,10 和 18 个个体,各群平均重量为 162,148,153 和 140 磅,求全体学生的平均重量.

解 ☞ $\bar{x}=\frac{\sum fx}{n}=\frac{15\times162+20\times148+10\times153+18\times140}{15+20+10+18}=150$ 磅

5.33 使用本章表 5-2 中身高的频数分布,求 XYZ 大学 100 名男生的平均身高.

解 ☞ 解题工作列在表 5-8 中,注意全体有身高 60～62 英寸,63～65 英寸,等的学生,被考虑为身高 61,64 等英寸,从而问题简化成:5 个学生身高 61 英寸,18 个学生身高 64 英寸等.求 100 个学生的平均身高:

$$\bar{x}=\frac{\sum fx}{\sum f}=\frac{\sum fx}{n}=\frac{6745}{100}=67.45\text{ 英寸}$$

表 5-8

身高(英寸)	组中值(x)	频数(f)	fx
60～62	61	5	305
63～65	64	18	1 152
66～68	67	42	2 814
69～71	70	27	1 890
72～74	73	8	584
		$n=\sum f=100$	$\sum fx=6\ 745$

计算可能比较烦锁.特别在数个数很大、分组很多的情形,简化技术可用来减少劳动,例子看习题 5.35.

5.34 利用本章代码公式(27)式,求算术平均.

解 ☞ 设第 j 组的组中值为 x_j,则 x_j 与某个特定的组中值 a 的差为 x_j-a,它一定等于分组区间

宽度 c 乘以某一整数 u_j，即 $x_j - a = cu_j$ 或 $x_j = a + cu_j$（也简写为 $x = a + cu$）.

由于 $n = \sum f_j$，则平均给定为

$$\bar{x} = \frac{\sum f_j x_j}{n} = \frac{\sum f_j (a + cu_j)}{n} = \frac{a\sum f_j}{n} + c\frac{\sum f_j u_j}{n}$$

$$= a + c\frac{\sum f_j u_j}{n} = a + c\bar{u}$$

5.35 使用习题 5.34 的代码公式，求 XYZ 大学 100 名男生的平均身高（参看习题 5.33）.

解 ☞ 计算工作可以如表 5-9 那样安排. 这一方法称为代码方法，任何情况都可使用.

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum fu}{n}\right)c = 67 + \frac{15}{100}\times 3 = 67.45 \text{ 英寸}$$

表 5-9

x	u	f	fu
61	−2	5	−10
64	−1	18	−18
$a\to$67	0	42	0
70	1	27	27
73	2	8	16
		$n = 100$	$\sum fu = 15$

5.36 对习题 5.31 中的数，求(a)方差，(b)标准差.

解 ☞ (a)**方法 1** 如习题 5.31，有 $\bar{x} = 4.8$，故

$$s^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{(5-4.8)^2 + (3-4.8)^2 + (6-4.8)^2 + (5-4.8)^2 + \cdots + (4-4.8)^2}{20}$$

$$= \frac{59.20}{20} = 2.96$$

方法 2

$$s^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{6(5-4.8)^2 + 2(3-4.8)^2 + 2(6-4.8)^2 + 5(4-4.8)^2 + 3(8-4.8)^2}{20}$$

$$= \frac{59.20}{20} = 2.96$$

(b)从(a)，$s^2 = 2.96$ 且 $s = \sqrt{2.96} = 1.72$.

5.37 求习题 5.32 中学生体重的标准差.

解 ☞ $$s^2 = \frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{15\times(162-150)^2 + 20\times(148-150)^2 + 10\times(153-150) + 18\times(140-150)^2}{15+20+10+18}$$

$$= \frac{4\ 130}{63} = 65.6(\text{磅})^2$$

因此 $s = \sqrt{65.6(\text{磅})^2} = \sqrt{65.6}\text{磅} = 8.10$ 磅，这里按通常的代数律运算了单位.

5.38 求 XYZ 大学 100 个男生的身高的标准差，参看习题 5.33.

解 ☞ 从习题 5.33 有 $\bar{x} = 67.45$ 英寸. 计算工作如表 5-10 所安排.

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{852.7500}{100}} = \sqrt{8.5275} = 2.92 \text{ 英寸}$$

表 5-10

身高（英寸）	组中值 x	$x-\bar{x} = x - 67.45$	$(x-\bar{x})^2$	频数 f	$f(x-\bar{x})^2$
60～62	61	−6.45	41.6025	5	208.0125
63～65	64	−3.45	11.9025	18	214.2450
66～68	67	−0.45	0.2025	42	8.5050
69～71	70	2.55	6.5025	27	175.5675
72～74	73	5.55	30.8025	8	246.4200
				$n = \sum f = 100$	$\sum f(x-\bar{x})^2 =$ 852.7500

5.39　利用本章代码公式(28)式,求方差.

解　如习题 5.34,有 $x_j = a + cu_j$,且

$$\bar{x} = a + c\frac{\sum f_j u_j}{n} = a + c\bar{u}$$

从而

$$\begin{aligned}
s^2 = \frac{1}{n}\sum f_j(x_j - \bar{x})^2 &= \frac{1}{n}\sum f_j(cu_j - c\bar{u})^2 \\
&= \frac{c^2}{n}\sum f_j(u_j - \bar{u})^2 \\
&= \frac{c^2}{n}\sum f_j(u_j^2 - 2u_j\bar{u} + \bar{u}^2) \\
&= \frac{c^2}{n}\sum f_j u_j^2 - \frac{2\bar{u}c^2}{n}\sum f_j u_j + \frac{c^2}{n}\sum f_j\bar{u}^2 \\
&= c^2\frac{\sum f_j u_j^2}{n} - 2\bar{u}^2c^2 + c^2\bar{u}^2 \\
&= c^2\frac{\sum f_j u_j^2}{n} - c^2\left(\frac{\sum f_j u_j}{n}\right)^2 \\
&= c^2\left[\frac{\sum fu^2}{n} - \left(\frac{\sum fu}{n}\right)^2\right] \\
&= c^2[\overline{u^2} - \bar{u}^2]
\end{aligned}$$

5.40　使用习题 5.39 的代码公式,求习题 5.33 中身高的标准差.

解　工作安排于表 5-11,可以如习题 5.35 一样求得 $\bar{x}$.从最后一列可得

$$s^2 = c^2\left[\frac{\sum fu^2}{n} - \left(\frac{\sum fu}{n}\right)^2\right] = c^2(\overline{u^2} - \bar{u}^2)$$

$$= 3^2\left[\frac{97}{100} - \left(\frac{15}{100}\right)^2\right] = 8.5275$$

因此,$s = 2.92$ 英寸.

表 5-11

x	u	f	fu	fu^2
61	−2	5	−10	20
64	−1	18	−18	18
$a\to$67	0	42	0	0
70	1	27	27	27
73	2	8	8	32
		$n=\sum f=100$	$\sum fu=15$	$\sum fu^2=97$

5.41　求习题 5.33 身高分布的前四阶关于均值的中心矩.

解　继续习题 5.40,使用本章前面的记号,有表 5-12,从而有

$$M_1' = \frac{\sum fu}{n} = 0.15,\quad M_3' = \frac{\sum fu^3}{n} = 0.33$$

$$M_2' = \frac{\sum fu^2}{n} = 0.97,\quad M_4' = \frac{\sum fu^4}{n} = 2.53$$

表 5-12

x	u	f	fu	fu^2	fu^3	fu^4
61	2	5	−10	20	−40	80
64	−1	18	−18	18	−18	18
67	0	42	0	0	0	0
70	1	27	27	27	27	27
73	2	8	16	32	64	128
		$n=\sum f=100$	$\sum fu=15$	$\sum fu^2=97$	$\sum fu^3=33$	$\sum fu^4=253$

从(32)式

$m_1=0$

$m_2=c^2(M'_2-M'^2_1)=9\times(0.97-0.15^2)=8.5275$

$m_3=c^3(M'_3-3M'_1M'_2+2M'^3_1)=27\times(0.33-3\times0.15\times0.97+2\times0.15^3)=-2.6932$

$m_4=c^4(M'_4-4M'_1M'_3+6M'^2_1M'_2-3M'^4_1)$

$=81\times(2.53-4\times0.15\times0.33+6\times0.15^2\times0.97-3\times0.15^4)=199.3759$

5.42　从习题 5.33 的身高分布,求(a)偏度系数,(b)峰度系数.

解 ☞ (a)从习题 5.41,

$$m_2=s^2=8.5275,\qquad m_3=-2.6932$$

从而

$$\text{偏度系数}=a_3=\frac{m_3}{s^3}=\frac{-2.6932}{\sqrt{8.5275^3}}=-0.14$$

(b)从习题 5.41,

$$m_4=199.3759,\qquad m_2=s^2=8.5275$$

从而

$$\text{峰度系数}=a_4=\frac{m_4}{s^4}=\frac{199.3759}{8.5275^2}=2.74$$

从(a)可以看到分布适度地偏向左边.从(b)可以看到它比正态分布峰值稍许小点(正态分布峰度系数为 3).

综合问题

5.43　(a)表 5-2 中,如何用随机数表抽取容量为 4 的 30 个随机样本(有放回),(b)求(a)中样本均值的抽样分布的平均值和标准差,(c)将(b)的结果与理论值进行比较,解释矛盾.

解 ☞ (a)使用两位数,100 个学生的各个为 00,01,02,…,99(参看表 5-13),因此,高度为 60～62 英寸的 5 个学生对应数为 00～04,高度为 63～56 英寸的 18 个学生对应数为 05～22 等等,每一个学生对应数称为抽样数码.

表 5-13

身高(英寸)	频数	抽样数码
60～62	5	00～04
63～65	18	05～22
66～68	42	23～64
69～71	27	65～91
72～74	8	92～99

现在我们从随机数表(附录 H)中抽取抽样数码.从第一行相继找到 51,77,46,40,等等.我们将这些数作为随机抽样数码,每一个将产生一个特定的学生身高.因此 51 对应的学生身高是 66～68 英寸,我们取作 67 英寸(组中值).类似地,77,27,46 分别产生的身高是 70,67,67.

按此过程可获得表 5-14,它列出了抽出的抽样数码.对应的身高.30 个样本的每一个的平均值.应该说明,虽然在第一行开始已保证是一张随机数表,但我们可以选择任一块部位从任一处开始.

表 5-14

抽出的抽样数码	对应的身高	平均身高	抽出的抽样数码	对应的身高	平均身高
1. 51,77,27,46	67,70,67,67	67.75	**16.** 11,64,55,58	64,67,67,67	66.25
2. 40,42,33,12	67,67,67,64	66.25	**17.** 70,56,97,43	70,67,73,67	69.25
3. 90,44,46,62	70,67,67,67	67.75	**18.** 74,28,93,50	70,67,73,67	69.25
4. 16,28,98,93	64,67,73,73	69.25	**19.** 79,42,71,30	70,67,70,67	68.50
5. 58,20,41,86	67,64,67,70	67.00	**20.** 58,60,21,33	67,67,64,67	66.25
6. 19,64,08,70	64,67,64,70	66.25	**21.** 75,79,74,54	70,70,70,67	69.25
7. 56,24,03,32	67,67,61,67	65.50	**22.** 06,31,04,18	64,67,61,64	64.00
8. 34,91,83,58	67,70,70,67	68.50	**23.** 67,07,12,97	70,64,64,73	67.75
9. 70,65,68,21	70,70,70,64	68.50	**24.** 31,71,69,88	67,70,70,70	69.25
10. 96,02,13,87	73,61,64,70	67.00	**25.** 11,64,21,87	64,67,64,70	66.25
11. 76,10,51,08	70,64,67,64	66.25	**26.** 03,58,57,93	61,67,67,73	67.00
12. 63,97,45,39	67,73,67,67	68.50	**27.** 53,81,93,88	67,70,73,70	70.00
13. 05,81,45,93	64,70,67,73	68.50	**28.** 23,22,96,79	67,64,73,70	68.50
14. 96,01,73,52	73,61,70,67	67.75	**29.** 98,56,59,36	73,67,67,67	68.50
15. 07,82,54,24	64,70,67,67	67.00	**30.** 08,15,08,84	64,64,64,70	65.50

(b)表 5-15 给出了(a)中获得的样本均值频数分布,这是均值的抽样分布.用前面描述的代码方法可获得其均值和标准差:

$$\text{均值} = a + c\bar{u} = a + \frac{c\sum fu}{n} = 67.00 + \frac{0.75\times 23}{30} = 67.58\ \text{英寸}$$

$$\text{标准差} = c\sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} = c\sqrt{\frac{\sum fu^2}{n} - \left(\frac{\sum fu}{n}\right)^2}$$

$$= (0.75)\sqrt{\frac{123}{30} - \left(\frac{23}{30}\right)^2} = 1.41\ \text{英寸}$$

表 5-15

样本均值	筹码	f	u	fu	fu^2
64.00	/	1	−4	−4	16
64.75		0	−3	0	0
65.50	//	2	−2	−4	8
66.25	~~////~~ /	6	−1	−6	6
$a\to$67.00	////	4	0	0	0
67.75	////	4	1	4	4
68.50	~~////~~ //	7	2	14	28
69.25	~~////~~	5	3	15	45
70.00	/	1	4	4	16
		$\sum f = n = 30$		$\sum fu = 23$	$\sum fu^2 = 123$

(c)样本均值的抽样分布的理论期望值记为 $\mu_{\bar{X}}$,它等于总体的期望值 μ,是 67.45 英寸(参看习题 5.33),此与(b)中的 67.58 英寸很一致.

样本均值的抽样分布的标准差记为 $\sigma_{\bar{X}}$,它等于 $\sigma/\sqrt{n}$,这里总体标准差 $\sigma = 2.92$ 英寸(参看习题 5.40),样本容量 $n = 4$.由于 $\sigma/\sqrt{n} = 2.92/\sqrt{4} = 1.46$ 英寸,它与(b)中的 1.41 英寸也很一致.有一些矛盾差异,实际上是由于仅有 30 个样本且样本容量不大.

5.44 有一个非常大的学生总体,其体重的标准差是 10.0 磅.从此总体每次抽 200 个学生作样本,对每一样本计算体重的标准差,求(a)标准差抽样分布的均值,(b)该分布的标准差.

解 抽样可以考虑为从无限总体抽样,或有限总体有放回抽样,从本章表 5-1,有

(a) $$\mu_S = \sigma = 10.0\ \text{磅}$$

(b)
$$\sigma_S = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \frac{10}{\sqrt{400}} = 0.50 \text{ 磅}$$

5.45 在习题 5.44 中的样本,有多大的百分比使其标准差(a)大于 11.0 磅,(b)小于 8.8 磅.

解 样本标准差的抽样分布近似正态,均值为 10.0 磅,标准差为 0.50 磅.

(a)11.0 磅在标准单位中 $=(11.0-10.0)/0.50=2.0$,正态曲线 $z=2.0$ 右边的面积是 $(0.5-0.4772)=0.0228$,因此,所求百分比为 2.3%.

(b)8.8 磅在标准单位中 $=(8.8-10.0)/0.50=-2.4$,正态曲线下 $z=-2.4$ 左边的面积是 $(0.5-0.4908)=0.0082$,因此,所求百分比为 0.8%.

5.46 从一个连续总体中抽取 6 个观测的一个样本,后两个观测小于前 4 个的概率是多少?

解 假定总体有密度函数 $f(x)$,4 个观测中的 3 个大于 u,同时剩下的一个在 u 和 $u+du$ 之间的概率为

(1)
$${}_4C_3\left[\int_u^{\infty} f(x)dx\right]^3 f(u)du$$

后两个观测小于 u 的概率(这样比前 4 个小)为

(2)
$$\left[\int_{-\infty}^{u} f(x)dx\right]^2$$

那么,前 4 个大于 u,后 2 个小于 u 的概率是(1)和(2)的乘积

(3)
$${}_4C_3\left[\int_u^{\infty} f(x)dx\right]^3 f(u)du\left[\int_{-\infty}^{u} f(x)dx\right]^2$$

由于 u 可以取 $-\infty$ 至 $+\infty$ 间的值,后 2 个小于前 4 个的总概率是(3)从 $-\infty$ 至 $+\infty$ 积分,即

(4)
$${}_4C_3\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_u^{\infty} f(x)dx\right]^3\left[\int_{-\infty}^{u} f(x)dx\right]^2 f(u)du$$

计算上式,令

(5)
$$v = \int_{-\infty}^{u} f(x)dx$$

那么

(6)
$$dv = f(u)du, \quad 1 - v = \int_u^{\infty} f(x)dx$$

当 $u=\infty$ 时 $v=1$ 和 $u=-\infty$ 时 $v=0$,因此(4)变成

$${}_4C_3\int_0^1 v^2(1-v)^3dv = 4\frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)} = \frac{1}{15}$$

这就是所求概率.可以注意到这个概率不依赖概率分布 $f(x)$,这是很有趣的,这是非参数统计的一个例子,因为这里没有总体参数.

另解 用 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 记观测,由于总体是连续的,我们可以假定他们均不相同.下标 $1,2,\cdots,6$ 共有 6! 种排法,这些排法的任一种与任意另一种相对于升序排列的地位是相似的.在 6! 种中,确实有 $4!\times 2!$ 种使 x_1,x_2,x_3,x_4 成为较大的 4 个观测,而 x_5,x_6 是较小的两个观测,因此要求的概率为

$$\frac{4!\times 2!}{6!} = \frac{1}{15}$$

5.47 设 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是从一容量为 N 的有限总体中,无放回抽出的容量为 n 的随机样本.证明如果总体均值为 μ、方差为 σ^2,则(a)$E(X_j)=\mu$,(b)$\mathrm{Cov}(X_j,X_k)=-\sigma^2/(N-1)$.

证明 假定总体由 $\{a_1,a_2,\cdots,a_N\}$ 组成,其中的 a 值可以相同.一个随机抽样程序就是使从 N 个 a 值中选 n 个的每一个选择有相同的概率(即 $1/{}_NC_n$).这意味着 X_j 有相同的分布

$$X_j = \begin{cases} a_1, & \text{概率 } 1/N \\ a_2, & \text{概率 } 1/N \\ \cdots\cdots & \\ a_N, & \text{概率 } 1/N \end{cases} \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

然而他们不是相互独立的.的确当 $j\neq k$ 时,X_j 和 X_k 的联合分布为

$$P(X_j=\alpha_\lambda, X_k=\alpha_\nu)=P(X_j=\alpha_\lambda)P(X_k=\alpha_\nu \mid X_j=\alpha_\lambda)$$
$$=\frac{1}{N}P(X_k=\alpha_\nu \mid X_j=\alpha_\lambda)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{1}{N-1}\right), & \lambda\neq\nu\\ 0, & \lambda=\nu\end{cases}$$

其中 λ 和 ν 从 1 到 N

(a)
$$E(X_j)=\sum_{\lambda=1}^{N}\alpha_\lambda P(X_j=\alpha_\lambda)=\frac{1}{N}\sum_{\lambda=1}^{N}\alpha_\lambda=\mu$$

(b)
$$\mathrm{Cov}(X_j,X_k)=E[(X_j-\mu)(X_k-\mu)]$$
$$=\sum_{\lambda=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N}(\alpha_\lambda-\mu)(\alpha_\nu-\mu)P(X_j=\alpha_\lambda, X_k=\alpha_\nu)$$
$$=\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N-1}\right)\sum_{\lambda\neq\nu=1}^{N}(\alpha_\lambda-\mu)(\alpha_\nu-\mu)$$

最后一个和式包括 $N(N-1)$项，对应到 λ 和 ν 的一切不等的数对.

现在，按初等代数

$$[(\alpha_1-\mu)+(\alpha_2-\mu)+\cdots+(\alpha_N-\mu)]^2=\sum_{\lambda=1}^{N}(\alpha_\lambda-\mu)^2+\sum_{\lambda\neq\nu=1}^{N}(\alpha_\lambda-\mu)(\alpha_\nu-\mu)$$

在一个方程中，左端是 0，因为按定义

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N=N\mu$$

而右端第一个和按定义等于 $N\sigma^2$，因此

$$\sum_{\lambda\neq\nu=1}^{N}(\alpha_\lambda-\mu)(\alpha_\nu-\mu)=-N\sigma^2$$
$$\mathrm{Cov}(X_j,X_k)=\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N-1}\right)(-N\sigma^2)=-\frac{\sigma^2}{N-1}$$

5.48　证明习题 5.47 中样本均值的(a)期望值，(b)方差分别是

$$\mu_{\bar{X}}=\mu,\qquad \sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

证明　(a)
$$E(\bar{X})=E\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n}[E(X_1)+\cdots+E(X_n)]$$
$$=\frac{1}{n}(\mu+\cdots+\mu)=\mu$$

这里使用了习题 5.47(a).

(b)使用定理 3-5，3-16(其推广)和习题 5.47，有

$$\mathrm{Var}(\bar{X})=\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{n}X_j\right)=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Var}(X_j)+\sum_{j\neq k=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_j,X_k)\right]$$
$$=\frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2+n(n-1)\left(-\frac{\sigma^2}{N-1}\right)\right]$$
$$=\frac{\sigma^2}{n}\left[1-\frac{n-1}{N-1}\right]=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

补充习题

均值的抽样分布

5.49　一个总体包含四个数 3，7，11，15，有放回地从此总体中抽取容量为 2 的样本，考虑一切可能情况，求(a)总体均值，(b)总体标准差，(c)样本均值的抽样分布的均值，(d)样本均值的抽样分布的标准差. 利用适宜的公式直接证明(c)和(d)是来自(a)和(b).

5.50　就抽样是无放回的情形解习题 5.49.

5.51　1500 个球轴承的重量服从正态分布，均值为 22.40 盎司，标准差为 0.048 盎司，从该总体抽取容量为 36 的随机样本 300 个，试确定样本均值的抽样分布的均值和标准差，如果抽样是(a)有放回的，(b)无放回的.

5.52　如果总体包含 72 个球轴承，解习题 5.51.

5.53　在习题 5.51 中,有多少个随机样本能达到下列要求,(a)它们的均值在 22.39 和 22.41 盎司之间,(b)它们的均值大于 22.42 盎司,(c)它们的均值小于 22.37 盎司,(d)其均值小于 22.38 盎司或大于 22.41 盎司.

5.54　一个公司制造一种真空管,其平均寿命为 800 小时,标准差为 60 小时.从此群中抽取一个 16 只真空管的随机样本,求下列概率,(a)样本平均寿命在 790 和 810 小时之间,(b)小于 785 小时,(c)大于 820 小时,(d)在 770 和 830 小时之间.

5.55　如果取 64 只真空管的一个随机样本,解习题 5.54.解释其间的差异.

5.56　一个百货公司所收到的货包的重量的平均值为 300 磅,标准差为 50 磅.今将随机地收到的 25 个货包放在磅秤上,求它们重量超过磅秤指明的安全限 8200 磅的概率.

比例的抽样分布

5.57　求下列 200 个孩子出生中的概率,(a)至少 40%是男孩,(b)43%至 57%是女孩,(c)54%以上是男孩,假定男孩,女孩的出生概率相同.

5.58　在每个由 200 个孩子组成的样本的 1 000 个中,你可以期望有多少个满足:(a)男孩少于 40%,(b)40%至 60%是女孩,(c)53%或更多是女孩.

5.59　如果每个样本是 100 个孩子而不是 200 个孩子,解习题 5.57.解释两者结果的差异.

5.60　一个罐子中有 80 个弹子,其中 60%是红的、40%是白的.有放回地从罐中抽取 20 个弹子作样本,共有 50 个这样的样本.问可以期望有多少个样本满足:(a)红弹子和白弹子数相等,(b)12 个红的和 8 个白的,(c)8 个红的和 12 个白的,(d)10 个或更多是白的.

5.61　设计一个试验来说明习题 5.60 的结果.你可使用写有红或白的纸条代替红、白弹子,纸条的比例应正确.在所使用的两次不同的测验中,你可能会导出什么样的误差?

5.62　一生产者寄出 1 000 批货物.每批有 100 个电灯泡,如果正常情况下 5%的灯泡是次品,求可以期望有多少批灯泡满足:(a)好灯泡少于 90 个,(b)好灯泡多于 98 个.

差与和的抽样分布

5.63　A 和 B 两种制造型号的电缆,其断裂强度的平均值分别为 4000 磅和 4500 磅,标准差分别为 300 磅和 200 磅.如果检查 100 条 A 型电缆和 50 条 B 型电缆,求下列概率:(a)B 型的平均断裂强度比 A 型至少多 600 磅,(b)B 型的平均断裂强度至少比 A 型多 450 磅.

5.64　如果两个型号各检测 100 条电缆,求习题 5.63 中的概率,解释两者间差异.

5.65　在一项素质测验中,学生的平均得分为 72,标准差为 8.两群学生分别有 28 个学生和 36 个学生,求这两群平均成绩的差满足下列要求的概率:(a)差 3 或更多分,(b)差 6 或更多分,(c)差在 2 至 5 分之间.

5.66　一罐子有 60 个红弹子和 40 个白弹子.有放回地从罐中取 30 个弹子,记录它们的颜色,共取这样的样本两个.求两个样本中红弹子数之差大于等于 8 的概率.

5.67　如果抽取是无放回的,对两个样本解习题 5.66.

5.68　选举说明某候选人得到了 65%的选票,现有 200 张选票一组的两个随机样本.求两个样本中该候选人得票比例之差超过 10%的概率.

5.69　如果 U_1 和 U_2 是习题 5.12 中的两个数集合,证实(a)$\mu_{U_1+U_2}=\mu_{U_1}+\mu_{U_2}$,(b)$\sigma_{U_1+U_2}=\sqrt{\sigma^2_{U_1}+\sigma^2_{U_2}}$.

5.70　对 3 个重量进行测量,分别测得 20.48,35.97 和 62.34 磅,对应的标准差为 0.21,0.46 和 0.54 磅,求(a)均值和(b)3 个重量之和的标准差.

5.71　一种电池的电压非常接近正态分布,均值为 15.0 伏,标准差为 0.2 伏.4 个这样的电池连在一起,求组在一起的电压超过 68.8 伏的概率.

方差的抽样分布

5.72　继续习题 5.49,求(a)方差抽样分布的均值,(b)方差的抽样分布的标准差.

5.73　如果抽样是无放回的,解习题 5.72.

5.74　有一个方差为 15 的正态总体,如果从总体中抽取容量为 5 的一些样本,求下列条件的样本可期望的百分数,(a)方差小于 10,(b)方差大于 20,(c)方差在 5 至 10 之间.

5.75　一个公司制造的电视显像管的寿命服从正态分布,均值为 2 000 小时,标准差为 60 小时,如果随机地

选10个显像管,求样本标准差满足下列条件的概率:(a)不超过50小时,(b)在50和70小时之间.

总体方差未知时的情形

5.76 根据自由度为1的学生氏 t 分布表(附录D),有 $P(-1\leqslant T\leqslant 1)=0.50$,检查习题5.1的结果是否与此值一致.解释任何存在的差异.

5.77 T 有 $\nu=1$ 的学生氏 t 分布,使用(a) $P(-1\leqslant T\leqslant 1)=0.50$,(b) $P(-1.376\leqslant T\leqslant 1.376)=0.60$,检查习题5.49的结果是否与上述值一致.

5.78 解释为什么你能用本章定理5-7,设计一张附录D中的学生氏 t 分布表.

方差比的抽样分布

5.79 从一个正态分布总体中抽取容量为4和8的两个样本,一个方差比另一个方差大1.5倍的概率是大于0.05,还是在0.05与0.01之间,还是小于0.01?

5.80 有两个公司 A,B 制造灯泡,两者的寿命均服从正态分布,A 生产的标准差为40小时,B 生产的标准差为50小时,A 取8个且 B 取16个灯泡作样本,确定第一样本的方差比第二个样本方差大(a)2倍,(b)大1.2倍的概率.

5.81 如果寿命分布的标准差如下:(a)两者都是40小时,(b)两者都是50小时,解习题5.80.

频数分布

5.82 表5-16给出了L&M公司检测的400个无线真空管的寿命的频数分布,根据此表,确定(a)第五个分组的上限值,(b)第八个分组的下限值,(c)第七个分组的组中值,(d)最后一组的分界点,(e)分组区间的宽度,(f)第四分组的频数,(g)第六分组的相对频率,(h)寿命不超过600小时的真空管的百分数,(i)寿命大于或等于900小时的真空管的百分数,(j)寿命至少500小时但小于1 000小时的真空管的百分数.

表 5-16

寿命(小时)	真空管频数
300～399	14
400～499	46
500～599	58
600～699	76
700～799	68
800～899	62
900～999	48
1 000～1 099	22
1 100～1 199	6
总数	400

5.83 对应习题5.82的频数分布,构造(a)一个直方图,(b)频数折线图.

5.84 用习题5.82的数据,构造(a)频率分布或百分数分布,(b)频率直方图,(c)频率折线图.

5.85 估计习题5.82中满足下列条件的真空管的百分数:(a)寿命小于560小时,(b)寿命超过970小时,(c)寿命在620和890小时之间.

5.86 一个公司生产的垫圈的内径可以测量到千分之一英寸的精度,如果这些内径的频数分布的组中值定为0.321,0.324,0.327,0.330,0.333和0.336.求(a)分组区间宽度,(b)分组的分界点,(c)分组的组限.

5.87 表5-17给出某公司造的一个60个球轴承样本的直径的英寸值.使用适当的分组区间构造直径的频数分布.

表 5-17

0.738	0.729	0.743	0.740	0.736	0.741	0.735	0.731	0.726	0.737
0.728	0.737	0.736	0.735	0.724	0.733	0.742	0.736	0.739	0.735
0.745	0.736	0.742	0.740	0.728	0.738	0.725	0.733	0.734	0.732
0.733	0.730	0.732	0.730	0.739	0.734	0.738	0.739	0.727	0.735
0.735	0.732	0.735	0.727	0.734	0.732	0.736	0.741	0.736	0.744
0.732	0.737	0.731	0.746	0.735	0.735	0.729	0.734	0.730	0.740

5.88 用习题 5.87 的数据，构造(a)直方图，(b)频数折线图，(c)频率分布，(d)频率直方图，(e)频率折线图.

5.89 用习题 5.88 的结果确定下列条件直径的球轴承的百分数.(a)超过 0.732 英寸，(b)不大于 0.736 英寸，(c)在 0.730 和 0.738 英寸之间. 比较所得结果与直接从表 5-17 原始数据获得的结果.

5.90 用习题 5.82 的数据，做习题 5.88 的各项工作.

样本均值、标准差和矩的计算

5.91 一学生在五门课程中得到 85,76,93,82 和 96 分，确定分数的平均值.

5.92 某人对一种刺激的反应时间，一个心理学家测得为 0.53,0.46,0.50,0.49,0.52,0.53,0.44 和 0.55 秒，确定此人对该刺激的平均反应时间.

5.93 一组数包含 6 个 6,7 个 7,8 个 8,9 个 9 和 10 个 10.求这组数的算术平均值.

5.94 一个学生在物理课程的实验、讲课和陈述三部分中的得分分别为 71,78 和 89,(a)如果这些分数的权重分别是 2,4 和 5,其恰当的平均分数是多少？(b)如果使用相等的权重，其平均分数是多少？

5.95 3 个经济学教员报告他们班的平均成绩分别为 79,74 和 72,这 3 个班分别有学生 32,25 和 17 人，求全体学生的平均分数.

5.96 一个公司付给全体雇员的平均年薪为 5000 美元，公司付给男雇员和女雇员的平均年薪分别为 5200 美元和 4200 美元，确定该公司男雇员和女雇员的百分数.

5.97 表 5-18 列出了一个公司制造的一种缆绳能承受的最大负载分布，单位为短吨（1 短吨 = 2000磅），确定平均最大负载，(a)使用直接计算，(b)使用代码方法.

表 5-18

最大负载(短吨)	缆绳数
9~9.7	2
9.8~10.2	5
10.3~10.7	12
10.8~11.2	17
11.3~11.7	14
11.8~12.2	6
12.3~12.7	3
12.8~13.2	1
总数	60

5.98 用表 5-19 的资料，求 $\bar{x}$，(a)用直接计算，(b)用代码法.

表 5-19

x	462	480	498	516	534	552	570	588	606	624
f	98	75	56	42	30	21	15	11	6	2

5.99 表5-20列出了一公司制造的铆钉头部直径的分布,计算平均直径.

表 5-20

直径(英寸)	频数
0.7247~0.7249	2
0.7250~0.7252	6
0.7253~0.7255	8
0.7256~0.7258	15
0.7259~0.7261	42
0.7262~0.7264	68
0.7265~0.7267	49
0.7268~0.7270	25
0.7271~0.7273	18
0.7274~0.7276	12
0.7277~0.7279	4
0.7280~0.7282	1
总数	250

5.100 计算表5-21中数据的平均值.

表 5-21

分组	频数
10~15 以下	3
15~20 以下	7
20~25 以下	16
25~30 以下	12
30~35 以下	9
35~40 以下	5
40~45 以下	2
总数	54

5.101 求下列数的标准差,(a)3,6,2,1,7,5,(b)3.2,4.6,2.8,5.2,4.4,(c)0,0,0,0,0,1,1,1.

5.102 (a)对集合3,6,2,1,7,5的每一数加5,得集合8,11,7,6,12,10.说明两个集合有相同的标准差,但均值不同,两个均值有什么关系?

(b)对数3,6,2,1,7,5每个乘以2再加5,得11,17,9,7,19,15.两组数的标准差之间及两个均值之间有什么关系?

(c)在(a)和(b)中的特殊数集说明了均值和标准差的什么性质?

5.103 求等差序列4,10,16,22,…,154数集的标准差.

5.104 求下列分布的标准差:(a)习题5.97,(b)习题5.98.

5.105 对习题5.30的分布,求(a)均值,(b)标准差,解释所获结果的显著意义.

5.106 (a)求习题5.99中铆钉头直径的标准差 s? (b)铆钉头直径在($\bar{x}\pm s$),($\bar{x}\pm 2s$),($\bar{x}\pm 3s$)间的比例是多少? (c)比较(b)中的百分数和总体为正态时所能期望的理论值.考虑任何看到的差异.

5.107 (a)对习题5.28的数据求均值和标准差,

(b)对上述数据构造频率分布,求标准差,

(c)比较(a)和(b)的结果.

5.108 对习题5.87的数据,做习题5.107的工作.

5.109 (a)一堆 n 个数,全体中有 p 份额的部分是1,同时 $q=1-p$ 份额的部分是0,证明这个数集的标准差是 $\sqrt{pq}$.(b)利用(a)的结果计算习题5.101(c).

5.110 对数集4,7,5,9,8,3,6,求(a)一阶原点矩,(b)二阶原点矩,(c)三阶原点矩,(d)四阶原点矩.

5.111 对习题5.110中的数集,求(a)一阶关于均值的中心矩,(b)二阶中心矩,(c)三阶中心矩,(d)四阶中心矩.

5.112 对习题5.110中数集,求(a)关于数7的一阶矩,(b)二阶矩,(c)三阶矩,(d)四阶矩.

5.113 使用习题5.110和5.111的结果,证实下列矩之间的关系:(a) $m_2 = m_2' - m_1'^2$,(b) $m_3 = m_3' - 3m_1'm_2' + 2m_1'^3$,(c) $m_4 = m_4' - 4m_1'm_3' + 6m_1'^2m_2' - 3m_1'^4$.

5.114 对等差序列2,5,8,11,14,17数集,求关于均值的前四阶中心矩.

5.115 如果关于数2的一阶矩等于5,均值是多少?

5.116 如果一个数集关于数3的前四阶矩分别等于-2,10,-25和50,确定下列对应的矩,(a)关于均值的中心矩,(b)关于数5的矩,(c)关于0的原点矩.

5.117 求数集0,0,0,1,1,1,1,1关于均值的前四阶矩.

5.118 (a)证明 $m_5 = m_5' - 5m_1'm_4' + 10m_1'^2m_3' - 10m_1'^3m_2' + 4m_1'^5$,(b)对 m_6 寻找类似的公式.

5.119 一堆 n 个数,全部中的 p 份额部分为1,同时,$q = 1 - p$ 份额部分为0,求(a) m_1,(b) m_2,(c) m_3,(d) m_4.与习题5.117进行比较.

5.120 对表5-22的分布,计算关于均值的前四阶矩.

表 5-22

x	f
12	1
14	4
16	6
18	10
20	7
22	2
总数	30

5.121 对习题5.97的分布计算关于均值的前四阶矩.

5.122 对习题5.100的分布,求(a) m_1,(b) m_2,(c) m_3,(d) m_4,(e) $\bar{x}$,(f) s,(g) $\overline{x^2}$,(h) $\overline{x^3}$,(i) $\overline{x^4}$,(j) $\overline{(x+1)^3}$.

5.123 对习题5.120的分布,求(a)偏度系数,(b)峰度系数.

5.124 对习题5.97的分布,求(a)偏度系数,(b)峰度系数.参考习题5.121.

5.125 有两个分布,它们关于均值的二阶矩为9和6,关于均值的三阶矩为-8.1和-12.8,哪一个分布向左偏斜得更厉害?

5.126 上题两分布的关于均值的四阶矩分别为230和780,从(a)峰值,(b)偏度的观点,哪个分布更接近正态分布?

综合问题

5.127 7个数的一个总体,有均值40和标准差3,如果从这一总体抽取一个大小为5的样本,且计算每一样本的方差,在下列情形下求样本方差的抽样分布的均值,(a)有放回抽样,(b)无放回抽样.

5.128 一个公司制造的某种真空管,平均寿命为900小时,标准差为80小时,该公司寄出1 000批真空管,每批100只,问有多少批可以期望(a)平均寿命超过910小时,(b)寿命的标准差超过95小时?必须做什么假定?

5.129 在习题5.128中,如果寿命的中位数是900小时,我们可以期望有多少批的中位数寿命超过910小时?与习题5.128(a)的回答进行比较并解释这些结论.

5.130 在一项城市状况考试中,分数服从正态分布,均值为72,标准差为8,求(a)这些学生的高分段的前20%的最小分值,(b)随机地抽取100个学生,其高分段的前20%的最小分值比76小的概率.

5.131 (a)对 n 个数的等差序列 $a, a+d, a+2d, \cdots, a+(n-1)d$(即首项为 a,公差为 d 的等差数列),证明

其方差为$\frac{1}{12}(n^2-1)d^2$(提示:利用$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$, $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$), (b)对习题5.103利用(a).

5.132 证明等差数列$a, a+d, a+2d, \cdots, a+(n-1)d$的关于均值的前四阶矩为

$$m_1=0, m_2=\frac{1}{12}(n^2-1)d^2, m_3=0, m_4=\frac{1}{240}(n^2-1)(3n^2-7)d^4$$

与习题5.114作比较(提示:$1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4=\frac{1}{30}n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)$).

补充习题答案

5.49 (a)9.0, (b)4.47, (c)9.0, (d)3.16

5.50 (a)9.0, (b)4.47, (c)9.0, (d)2.58

5.51 (a)$\mu_{\bar{X}}=22.40$盎司, $\sigma_{\bar{X}}=0.008$盎司, (b)$\mu_{\bar{X}}=22.40$盎司, $\sigma_{\bar{X}}$比0.008盎司稍小

5.52 (a)$\mu_{\bar{X}}=22.40$盎司, $\sigma_{\bar{X}}=0.008$盎司, (b)$\mu_{\bar{X}}=22.40$盎司, $\sigma_{\bar{X}}=0.0057$盎司

5.53 (a)237, (b)2, (c)无, (d)24

5.54 (a)0.4972, (b)0.1587, (c)0.0918, (d)0.9544

5.55 (a)0.8164, (b)0.0228, (c)0.0038, (d)1.0000

5.56 0.0026

5.57 (a)0.0029, (b)0.9596, (c)0.1446

5.58 (a)2, (b)996, (c)218

5.59 (a)0.0179, (b)0.8664, (c)0.1841

5.60 (a)6, (b)9, (c)2, (d)12

5.62 (a)19, (b)125

5.63 (a)0.0077, (b)0.8869

5.64 (a)0.0028, (b)0.9172

5.65 (a)0.2150, (b)0.0064, (c)0.4504

5.66 0.0482

5.67 0.0188

5.68 0.0410

5.70 (a)118.79磅, (b)0.74磅

5.71 0.0228

5.72 (a)10.00, (b)11.49

5.73 (a)40/3, (b)28.10

5.74 (a)0.50, (b)0.17, (c)0.28

5.75 (a)0.36, (b)0.49

5.80 (a)在0.01和0.05之间, (b)大于0.05

5.81 (a)大于0.05, (b)大于0.05

5.82 (a)799, (b)1 000, (c)949.5, (d)1 099.5, 1199.5, (e)100小时, (f)76, (g)62/400=0.155或15.5%, (h)29.5%, (i)19.0%, (j)78.0%

5.85 (a)24%, (b)11%, (c)46%

5.86 (a)0.003英寸

(b)0.3195, 0.3225, 0.3255, …, 0.3375英寸

(c)0.320~0.322, 0.323~0.325, 0.326~0.328, …, 0.335~0.337

5.91 86

5.92 0.50秒

5.93 8.25

5.94 (a)82, (b)79

5.95 78

5.96　80%，20%

5.97　11.09 吨

5.98　501.0

5.99　0.72642 英寸

5.100　26.2

5.101　(a)2.16，(b)0.90，(c)0.484

5.103　45

5.104　(a)0.733 吨，(b)38.60

5.105　(a) $\bar{x}=2.47$，(b) $s=1.11$

5.106　(a)0.000576 英寸，(b)72.1%，93.3%，99.76%

5.107　(a)146.8 磅，12.9 磅

5.108　(a)0.7349 英寸，0.00495 英寸

5.110　(a)6，(b)40，(c)288，(d)2188

5.111　(a)0，(b)4，(c)0，(d)25.86

5.112　(a) −1，(b)5，(c) −91，(d)53

5.114　0，26.25，0，1193.1

5.115　7

5.116　(a)0，6，19，42，(b) −4，22，−117，560，(c)1，7，38，155

5.117　0，0.2344，−0.0586，0.0696

5.120　$m_1=0$，$m_2=5.97$，$m_3=-3.97$，$m_4=89.22$

5.121　$m_1=0$，$m_2=0.53743$，$m_3=0.36206$，$m_4=0.84914$

5.122　(a)0，(b)52.95，(c)92.35，(d)7158.20，(e)26.2，(f)7.28，(g)739.38，(h)22 247，(i)706 428，(j)24 545

5.123　(a) −0.2464，(b)2.62

5.124　(a)0.9190，(b)2.94

5.125　第一个分布

5.126　(a)第二个，(b)第一个

5.127　(a)7.2，(b)8.4

5.128　(a)106，(b)4

5.129　159

5.130　(a)78.7，(b)0.0090

第六章 估计理论

无偏估计和有效估计

我们在第五章中谈到,若统计量的均值或期望等于总体的参数,则称该统计量是总体参数的无偏估计量,从而统计量的对应值称为该参数的无偏估计.

例 6.1 在第五章中定义了均值 $\overline{X}$ 和方差 $\hat{S}^2$,由于 $E(\overline{X})=\mu$, $E(\hat{S}^2)=\sigma^2$,所以是总体均值 μ 和方差 σ^2 的无偏估计量,从而 $\overline{X}$ 和 $\hat{S}^2$ 的值就称为无偏估计.然而,由于通常 $E(\hat{S})\neq\sigma$,所以实际上 $\hat{S}$ 是 σ 的有偏估计量.

若两个统计量的抽样分布有相同的均值,则具有较小的方差的统计量称为该均值的更有效的估计量.显然实际中人们都喜欢估计是有效的和无偏的,但这往往是不可能的.

例 6.2 对于一个正态总体,均值和中位数的抽样分布都有相同的均值,即总体均值.然而,均值的抽样分布的方差是小于中位数的抽样分布的方差.因此,均值提供较中位数更有效的估计.见第五章表 5-1.

点估计和区间估计、可靠性

由一个数给定的总体参数估计称之为该参数的点估计.由包含参数的两个数之间的区间给定的总体参数估计称之为参数的区间估计.

例 6.3 如果我们说距离是 5.28 英尺,这就给出了一个点估计.若我们说距离是 5.28 ± 0.03 英尺,即距离属于 5.25 和 5.31 英尺之间,这就给出了一个区间估计.

一个估计的误差或精度的说明常称之为它的可靠性.

总体参数的置信区间估计

令 μ_S 和 σ_S 是一个统计量 S 的抽样分布的均值和标准差(标准误差).若 S 的抽样分布近似于正态(我们知道若样本量 $n\geqslant30$,这对许多统计量是真实的),我们可期望 S 大约 68.27%, 95.45% 和 99.73% 分别落在区间 $(\mu_S-\sigma_S, \mu_S+\sigma_S)$, $(\mu_S-2\sigma_S, \mu_S+2\sigma_S)$ 或 $(\mu_S-3\sigma_S, \mu_S+3\sigma_S)$ 内.

这等价于我们可期望,或我们可置信 μ_S 大约 68.27%, 95.45% 和 99.73% 分别在区间 $(S-\sigma_S, S+\sigma_S)$, $(S-2\sigma_S, S+2\sigma_S)$ 或 $(S-3\sigma_S, S+3\sigma_S)$ 内.因此,我们称这些区间分别是 68.27%, 95.45% 和 99.73% 对于估计 μ_S 的置信区间(即当 S 为无偏估计时,总体参数的置信区间).从而这些区间的端点 $(S\pm\sigma_S, S\pm2\sigma_S, S\pm3\sigma_S)$ 就称之为 68.27%, 95.45% 和 99.73% 置信限.

类似地, $S\pm1.96\sigma_S$ 和 $S\pm2.58\sigma_S$ 是对于 μ_S 的 95% 和 99% (或 0.95 和 0.99) 置信限.百分数置信值常称之为置信水平.在置信限里的数 1.96, 2.58 等就称之为临界值,用 z_c 表示.从置信水平我们可求得临界值,从临界值也可求得置信水平.

在表 6-1 里,我们给出了对应于在实践中有用的各种置信水平的 z_c 值.对于表中不出现的置信水平所对应的 z_c 值,可在附录 C 中从正态曲线面积表中查找.

表 6-1

置信水平	99.73%	99%	98%	96%	95.45%	95%	90%	80%	68.27%	50%
z_c	3.00	2.58	2.33	2.05	2.00	1.96	1.645	1.28	1.00	0.6745

在具有不同于正态分布(例如卡方分布，t 或 F 分布)的抽样分布的统计量的情形，要得到置信区间，就要做适当修正.

均值的置信区间

1. 大样本($n \geqslant 30$). 若统计量 S 是样本均值 $\overline{X}$，则对于总体均值 μ 估计的 95% 和 99% 置信限分别由 $\overline{X} \pm 1.96\sigma_{\overline{X}}$ 和 $\overline{X} \pm 2.58\sigma_{\overline{X}}$ 给出，更一般地，置信限由 $\overline{X} \pm z_c\sigma_{\overline{X}}$ 给出，这里 z_c 依赖于所描述的特殊的置信水平，可从表 6-1 中查到. 利用第五章得到的 $\sigma_{\overline{X}}$ 的值，当抽样是取自无限总体，或有放回地取自有限总体，总体均值的置信限由下式给出：

$$\overline{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1}$$

若抽样是无放回地取自容量为 N 的有限总体，则置信限为

$$\overline{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \tag{2}$$

一般，总体标准差 σ 是未知的，因此我们利用估计量 $\hat{S}$ 或 S 得到上述的置信限.

2. 小样本($n < 30$)且总体正态. 在这种情形我们利用 t 分布来得到置信限. 例如，若 $-t_{0.975}$ 和 $t_{0.975}$ 是 t 分布的每一侧尾部 2.5% 的面积所对应的 T 值，则对应 T 的 95% 置信区间由下式给出(见第五章)：

$$-t_{0.975} < \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{\hat{S}} < t_{0.975} \tag{3}$$

由此不等式我们知道 μ 由下式估计：

$$\overline{X} - t_{0.975}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{0.975}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

它具有 95% 置信水平. 一般对于总体均值的置信限由下式给出：

$$\overline{X} \pm t_c \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \tag{5}$$

这里值 t_c 可从附录 D 查到.

比较(5)式与(1)式，可以看到，对于小样本我们用 t_c 代替了 z_c. 对于 $n \geqslant 30$，z_c 与 t_c 实际是相等的. 它使我们注意到小样本理论的优势(当然它可同样地用于大样本，即它是精确的)是在(5)式中出现的 $\hat{S}$，这样用样本标准差来代替(1)式中的总体标准差(它通常是未知的).

比例的置信区间

假设统计量 S 是从二项式总体抽出的样本量 $n \geqslant 30$ 中的成功的比例，其中 p 是成功的比例(即成功的概率). 从而对于 p 的置信限由 $P \pm z_c\sigma_P$ 给出，这里 P 表示在容量为 n 的样本中成功的比例. 利用在第五章里得到的 σ_P 的值，我们知道对于总体比例的置信限由下式给出：

$$P \pm z_c\sqrt{\frac{pq}{n}} = P \pm z_c\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \tag{6}$$

这里抽样是取自无限总体或抽样是有放回地取自有限总体. 类似地，若抽样是无放回地取自容量为 N 的有限总体，置信限为

$$P \pm z_c\sqrt{\frac{pq}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \tag{7}$$

注意，这些结果是从(1)式和(2)式中用 P 代替 $\overline{X}$ 和用 $\sqrt{pq}$ 代替 σ 得到的.

我们利用对 p 的样本估计 P 来计算以上的置信限，更精确的方法在习题 6.27 里给出.

差与和的置信区间

若 S_1 和 S_2 是两个具有近似地正态抽样分布的样本统计量，对于对应于 S_1 和 S_2 的总体参数的差的置信限由下式给出：

$$S_1 - S_2 \pm z_c\sigma_{S_1-S_2} = S_1 - S_2 \pm z_c\sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2} \tag{8}$$

而对于总体参数的和的置信限由下式给出：

$$S_1 + S_2 \pm z_c\sigma_{S_1-S_2} = S_1 + S_2 \pm z_c\sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2} \tag{9}$$

这里样本是独立的.

例如，对于两个总体均值的差的置信限，在总体是无限的且有已知的标准差 σ_1, σ_2 的情形，由下式给出：

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm z_c\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm z_c\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \tag{10}$$

这里 $\overline{X}_1, n_1$ 和 $\overline{X}_2, n_2$ 是代表两个取自总体的样本的均值和容量.

类似地，对于两个总体比例的差的置信限由下式给出，这里总体是无限的：

$$P_1 - P_2 \pm z_c\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}} \tag{11}$$

式中 P_1 和 P_2 是两个样本比例，n_1 和 n_2 是取自总体的两个样本的容量.

正态分布方差的置信区间

事实上，$nS^2/\sigma^2 = (n-1)\hat{S}^2/\sigma^2$ 具有 $n-1$ 个自由度的卡方分布，它使我们能够对 σ^2 或 σ 得到置信限. 例如，若 $\chi^2_{0.025}$ 和 $\chi^2_{0.975}$ 是分布的每一个尾部面积的 2.5% 的 χ^2 的值，则 95% 置信区间是

$$\chi^2_{0.025} \leqslant \frac{nS^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{0.975} \tag{12}$$

或等价地

$$\chi^2_{0.025} \leqslant \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{0.975} \tag{13}$$

根据这些不等式，我们知道 σ 能由下列区间估计：

$$\frac{S\sqrt{n}}{\chi_{0.975}} \leqslant \sigma \leqslant \frac{S\sqrt{n}}{\chi_{0.025}} \tag{14}$$

或等价地

$$\frac{\hat{S}\sqrt{n-1}}{\chi_{0.975}} \leqslant \sigma \leqslant \frac{\hat{S}\sqrt{n-1}}{\chi_{0.025}} \tag{15}$$

具有 95% 置信水平. 类似地，其他的置信区间也能求得.

一般希望置信区间的宽度尽可能地小. 对于具有对称抽样分布的统计量，例如正态和 t 分布，利用相等的面积的尾部就能达到目的. 然而，对于非对称分布，例如卡方分布，可调整它尾部的面积以便得到最小的区间. 这个过程在习题 6.28 里说明.

方差比的置信区间

在第五章里，我们知道，若两个大小为 m 和 n 的独立的随机样本具有方差 S_1^2, S_2^2，它们分别来自两个方差 σ_1^2, σ_2^2 正态分布的总体，则随机变量 $\dfrac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2}$ 具有 $m-1, n-1$ 自由度的 F 分布. 例如，若我们用 $F_{0.01}$ 和 $F_{0.99}$ 表示 F 的值，各有面积的 1% 属于 F 分布的每个尾部，则具有 98% 置信水平有

$$F_{0.01} \leqslant \frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2} \leqslant F_{0.99} \tag{16}$$

根据此式我们知道对于两个总体的方差比 σ_1^2/σ_2^2 的 98% 置信区间由下式给出：

$$\frac{1}{F_{0.99}} \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \leqslant \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leqslant \frac{1}{F_{0.01}} \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \tag{17}$$

注意 $F_{0.99}$可从附录 F 的一个表中查到. 而根据定理 4-8, 值 $F_{0.01}$是颠倒分子与分母的自由度后的 $F_{0.99}$值的倒数.

用类似的方式我们可以利用附录 F 里适当的表求得一个 90% 置信区间, 由下式给出：

$$\frac{1}{F_{0.95}} \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \leqslant \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leqslant \frac{1}{F_{0.05}} \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \tag{18}$$

最大似然估计

尽管置信限对于估计总体参数是有价值的, 然而有单个的值或点估计仍然是方便的, 要得到最好的这样的估计, 我们使用费歇耳(Fisher)的著名方法——最大似然方法.

要说明这种方法, 我们假设总体有一个含有一个总体参数 θ 的密度函数, 要用一个确定的统计量来估计 θ. 于是该密度函数可用 $f(x,\theta)$表示. 假设有 n 个独立的观测值 $X_1, \cdots, X_n$, 对于这些观测值的联合密度函数是

$$L = f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta) \tag{19}$$

称之为似然. 从而最大似然可用 L 对 θ 求导并令求导后的结果等于零而得到. 为了这个目的, 首先对 L 取对数, 然后求导. 用这样的方法我们得到

$$\frac{1}{f(x_1,\theta)} \frac{\partial f(x_1,\theta)}{\partial \theta} + \cdots + \frac{1}{f(x_n,\theta)} \frac{\partial f(x_n,\theta)}{\partial \theta} = 0 \tag{20}$$

按 x_k 的表示, 对 θ 解这个方程, 就是 θ 的最大似然估计量.

这个方法能一般化. 在有若干个参数的情形, 我们对每个参数作偏导数, 再令得到的结果等于零, 并且解联立方程.

习题解答

无偏和有效估计

6.1 给出估计量(或估计)的例子, 它们是(a)无偏的和有效的, (b)无偏的和非有效的, (c)有偏的和非有效的.

解答 假设总体是正态的, 则

(a)样本均值 $\overline{X}$ 和修正的样本方差 $\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2$ 是两个这样的例子.

(b)样本中位数和样本统计量$\frac{1}{2}(Q_1+Q_3)$, 是两个这样的例子, 这里 Q_1 和 Q_3 是下和上样本四分位数. 由于它们的抽样分布的均值能描述总体均值, 所以二者都是总体均值的无偏估计. 然而, 它们与 $\overline{X}$ 比较都是非有效的.

(c)样本标准差 S, 修正的标准差 $\hat{S}$, 平均偏差和半四分位数间距是对于估算总体标准差 σ 的四个这样的例子.

6.2 一个科学家记录一个球的直径的 5 个测量值 6.33, 6.37, 6.36, 6.32 和 6.37 厘米的样本. 确定: (a)真实均值, (b)真实方差的无偏和有效的估计. 假设测量的直径是正态分布的.

解答 (a)真实的均值(即总体均值)的无偏和有效估计是

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{6.33+6.37+6.36+6.32-6.37}{5} = 6.35 \text{ 厘米}$$

(b)真实的方差(即总体方差)的无偏和有效估计是

$$\hat{s}^2=\frac{n}{n-1}s^2=\frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n-1}$$

$$=\frac{(6.33-6.35)^2+(6.37-6.35)^2+(6.36-6.35)^2+(6.32-6.35)^2+(6.37-6.35)^2}{5-1}$$

$=0.00055$ 平方厘米

注意 $\hat{s}=\sqrt{0.00055}=0.023$ 是真实的标准差的估计,但是这个估计既不是无偏的也不是有效的.

6.3 假设 XYZ 大学的 100 个男学生的身高代表该大学的全体 1546 男学生身高的一个随机样本.确定:(a)真实的均值,(b)真实的方差的无偏和有效的估计.

解 (a)根据习题 5.33:

$$\text{真实的平均身高的无偏和有效估计}=\overline{X}=67.45\text{ 英寸}$$

(b)根据习题 5.38:

$$\text{真实的方差的无偏和有效估计}=\hat{s}^2=\frac{n}{n-1}s^2=\frac{100}{99}(8.5275)=8.6136$$

因此,$\hat{s}=\sqrt{8.6136}=2.93$.注意到,由于 n 是个大数,所以 s^2 与 $\hat{s}^2$ 之间或 s 与 $\hat{s}$ 之间基本无区别.

6.4 给出习题 6.2 中球的真实(均值)直径的无偏和非有效的估计.

解 中位数是总体均值的无偏和非有效估计的一个例子.按数值对 5 个测量值排序,中位数是 6.36 厘米.

均值(大样本)的置信区间估计

6.5 求习题 6.3 中 XYZ 大学学生的平均身高的(a)95%,(b)99%置信区间.

解 (a)95% 置信限是 $\overline{X}\pm1.96\sigma/\sqrt{n}$.利用 $\overline{X}=67.45$ 英寸和 $\hat{s}=2.93$ 英寸作为 σ 的估计(见习题 6.3),置信限是 $67.45\pm1.96(2.93/\sqrt{100})$,或 67.45 ± 0.57 英寸.从而对于总体均值 μ 的 95% 置信区间是(66.88,68.02),它可用 $66.88<\mu<68.02$ 表示.

因此我们可以说总体均值高属于 66.88 与 68.02 英寸之间的概率是大约 95%,或 0.95.我们可记作 $P_r(66.88<\mu<68.02)=0.95$.这等价于称,我们是 95% 相信总体均值(或真实的均值)属于 66.88 与 68.02 英寸之间.

(b)99% 置信限是 $\overline{X}\pm2.58\sigma/\sqrt{n}$,对于给出的样本,

$$\overline{x}\pm2.58\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}=67.45\pm2.58\frac{2.93}{\sqrt{100}}=67.45\pm0.76\text{ 英寸}$$

因此,对于总体均值 μ 的 99% 置信区间是(66.69,68.21),它可用 $66.69<\mu<68.21$ 表示.

在得到以上置信区间中,我们假设总体是无限的或总体是如此大,以致我们可认为抽样是有放回地取自有限总体.对于有限总体,抽样是无放回的,我们可用 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ 替代 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.不管怎样,我们可认为因子 $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=\sqrt{\frac{1546-100}{1546-1}}=0.967$ 基本是 1.0,因此不需利用它.若它是有用的,则上述的置信限分别变成 67.45 ± 0.56 和 67.45 ± 0.73.

6.6 用一台机器经过一个星期做得一批球轴承,其 200 个的随机样本的直径长度有 0.824 英寸的均值和 0.042 英寸的标准差.求对于全体球轴承的均值直径的(a)95%,(b)99%置信限.

解 由于 $n=200$ 是大的,所以我们可假设 $\overline{X}$ 是很接近正态.

(a)95%置信限是

$$\overline{X}\pm1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\overline{x}\pm1.96\frac{s}{\sqrt{n}}=0.824\pm1.96\frac{0.042}{\sqrt{200}}=0.824\pm0.0058\text{ 英寸}$$

或 0.824 ± 0.006 英寸.

(b)99%置信限是

$$\overline{X}\pm2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\overline{x}\pm2.58\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}=0.824\pm2.58\frac{0.042}{\sqrt{200}}=0.824\pm0.0077\text{ 英寸}$$

或 0.824±0.008 英寸.

注意到我们已经假设所陈述的标准差是修正的标准差 $\hat{s}$. 若标准差是 s, 我们将利用 $\hat{s}=\sqrt{n/(n-1)}s=\sqrt{200/199}s$, 它对于所有的实际的目的都可看作 s. 一般地, 对 $n\geqslant30$, 我们可把 s 与 $\hat{s}$ 看作实际上是相等的.

6.7 求对于在习题 6.6 中的球轴承的均值直径的(a)98%,(b)90%,(c)99.73%的置信限.

解 ☞ (a)令 z_c 是这样的, 对 $z=z_c$ 的右边正态曲线下的面积是 1%. 从而由对称性, 对 $z=-z_c$ 的左边的面积也是 1%, 因此阴影的面积是总面积的 98% (图 6-1). 由于曲线下的总面积等于 1, 从而 $z=0$ 到 $z=z_c$ 的面积是 0.49; 因此, $z_c=2.33$. 故 98% 置信限是

$$\bar{x}\pm2.33\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.824\pm2.33\frac{0.042}{\sqrt{200}}=0.824\pm0.0069\text{ 英寸}$$

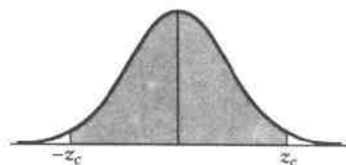


图 6-1

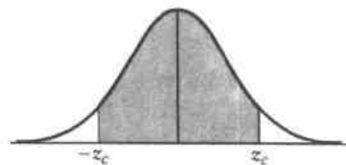


图 6-2

(b)我们要求的 z_c 是这样的, 从 $z=0$ 到 $z=z_c$ 的面积是 0.45; 从而 $z_c=1.645$(图 6-2). 故 90% 置信限是

$$\bar{x}\pm1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.824\pm1.645\frac{0.042}{\sqrt{200}}=0.824\pm0.0049\text{ 英寸}$$

(c)99.73% 置信限是

$$\bar{x}\pm3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.824\pm3\frac{0.042}{\sqrt{200}}=0.824\pm0.0089\text{ 英寸}$$

6.8 在测量反应时间中, 一位心理学家估计标准差是 0.05 秒. 他必须取多大容量的样本才能使(a)95%,(b)99% 置信水平使他的均值反应时间的估计误差不超过 0.01 秒?

解 ☞ (a)95% 置信限是 $\overline{X}\pm1.96\sigma/\sqrt{n}$, 估计的误差是 $1.96\sigma/\sqrt{n}$. 取 $\sigma=s=0.05$ 秒, 若 $(1.96)(0.05)/\sqrt{n}=0.01$, 则我们知道该误差等于 0.01 秒, 即 $\sqrt{n}=(1.96)(0.05)/0.01=9.8$, 或 $n=96.04$. 因此, 我们可以 95% 置信水平估计当 n 是 97 或更大时, 误差小于 0.01.

(b)99% 置信限是 $\overline{X}\pm2.58\sigma/\sqrt{n}$. 从而 $(2.58)(0.05)/\sqrt{n}=0.01$, 或 $n=166.4$. 因此, 若 n 是 167 或更大时我们可以 99% 置信估计误差小于 0.01.

注意到以上求解中假定了 $\overline{X}$ 接近正态分布, 由于所得到的 n 是大的, 故这一点是合理的.

6.9 总数为 200 中, 50 份数学成绩的随机样本显示均值 75 和标准差 10. (a)对于 200 份成绩的均值, 什么是 95% 置信限? (b)具有什么置信度, 我们就能说全部 200 份成绩的均值是 75±1?

解 ☞ (a)由于总体大小与样本大小比较不是很大, 我们必须认为抽样无放回. 于是 95% 置信限是

$$\overline{X}\pm1.96\sigma_{\overline{X}}=\overline{X}\pm1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=75\pm1.96\frac{10}{\sqrt{50}}\sqrt{\frac{200-50}{200-1}}=75\pm2.4$$

(b)置信限能由下式表示

$$\overline{X}\pm z_c\sigma_{\overline{X}}=\overline{X}\pm z_c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=75\pm z_c\frac{(10)}{\sqrt{50}}\sqrt{\frac{200-50}{200-1}}=75\pm1.23z_c$$

由于上式必须等于 75±1, 我们得到 $1.23z_c=1$ 或 $z_c=0.81$. 从 $z=0$ 到 $z=0.81$ 正态曲线下的面积是 0.2910, 因此, 所要求的置信度是 $2(0.2919)=0.582$ 或 58.2%.

均值(小样本)的置信区间估计

6.10 对于正态分布的 95% 临界值(两尾部的)由 ±1.96 给出. 若自由度数是(a) $\nu=9$,

(b)$\nu=20$,(c)$\nu=30$,(d)$\nu=60$.什么是对于 t 分布的对应值?

解 对于95%临界值(两尾部的)总阴影面积(图6-3)必须是0.05.因此,在右尾部的阴影面积是0.025,且对应的临界值是 $t_{0.975}$.从而所要求的临界值是 $\pm t_{0.975}$.对于给定的 ν 值,对应的值是(a) ± 2.26,(b) ± 2.09,(c) ± 2.04,(d) ± 2.00.

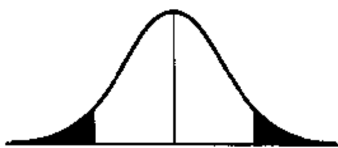


图6-3

6.11 一个球的直径的10个测量的样本给出均值 $\overline{X}=4.38$ 英寸和标准差 $S=0.06$ 英寸.求对于实际的直径的(a)95%,(b)99%置信限.

解 (a)95%置信限为 $\overline{X}\pm t_{0.975}(S/\sqrt{n-1})$.

由于 $\nu=n-1=10-1=9$,我们得到 $t_{0.975}=2.26$(也可见习题6.10(a)).于是利用 $\overline{X}=4.38$ 和 $S=0.06$,所要求的95%置信限是

$$4.38\pm 2.26\frac{0.06}{\sqrt{10-1}}=4.38\pm 0.0452\text{ 英寸}$$

因此,我们能95%相信真实的均值属于 $4.38-0.045=4.335$ 英寸与 $4.38+0.045=4.425$ 英寸之间.

(b)对于 $\nu=9$, $t_{0.995}=3.25$.于是99%置信限是

$$\overline{X}\pm t_{0.995}(S/\sqrt{n-1})=4.38\pm 3.25(0.06/\sqrt{10-1})=4.38\pm 0.0650\text{ 英寸}$$

99%置信区间是(4.315,4.445).

6.12 (a)假设大样本的抽样理论的方法是有效的,解决习题6.11.

(b)比较这两个方法的结果.

解 (a)利用大样本抽样理论,95%置信限是

$$\overline{X}\pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=4.38\pm 1.96\frac{0.06}{\sqrt{10}}=4.38\pm 0.037\text{ 英寸}$$

这里我们利用了样本标准差0.06作为 σ 的估计.类似地,99%置信限是 $4.38\pm(2.58)(0.06)/\sqrt{10}=4.38\pm 0.049$ 英寸.

(b)用小的或精确的抽样方法比用大的抽样方法得到的每个情形下的置信区间都更宽.这是我们可预见的,因为与大样本相比,可用的精度小样本更少.

比例的置信区间估计

6.13 在给定的一个社区内,从全体投票者中随机地选择100个投票者的投票记录样本,这100个投票者中的55%是支持特定的候选人的.求对于全体投票者支持候选人的比例的(a)95%,(b)99%,(c)99.73%置信限.

解 (a)对于总体 p 的95%置信限是

$$P\pm 1.96\sigma_P=P\pm 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=0.55\pm 1.96\sqrt{\frac{0.55\times 0.45}{100}}=0.55\pm 0.10$$

这里用了样本比例0.55来估计 p.

(b)对于 p 的99%置信限是

$$0.55\pm 2.58\sqrt{0.55\times 0.45/100}=0.55\pm 0.13$$

(c)对于 p 的99.73%置信限是

$$0.55\pm 3\sqrt{0.55\times 0.45/100}=0.55\pm 0.15$$

对于解决这个问题的更精确的方法,见习题6.27.

6.14 为了达到95%置信水平候选人被选上,在习题6.13中,我们应取多大的投票者样本?

解 若 $p>0.50$,候选人被选上,和这一事件是95%置信水平,我们要求 $P_r(p>50)=0.95$.由

于$(P-p)/\sqrt{p(1-p)/n}$是渐近地正态，

$$P_r\left(\frac{P-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}<\beta\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\beta}e^{-u^2/2}du$$

$$P_r(p>P\quad\beta\sqrt{p(1-p)/n})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\beta}e^{-u^2/2}du$$

与$P_r(p>0.50)=0.95$比较，利用附录C，描述如下：

$$P-\beta\sqrt{p(1-p)/n}=0.50,\quad 这里\ \beta=1.645$$

于是利用$P=0.55$和习题6.13中的估计$p=0.55$，我们有

$$0.55-1.645\sqrt{(0.55)(0.45)/n}=0.50\ 或\ n=271$$

6.15　在40次抛掷硬币中，得到24次正面．求对于在无限次抛硬币中得到正面的比例的(a)95%，(b)99.73%置信限．

解　☞ (a)在95%水平上，$z_c=1.96$，在公式$p=P\pm z_c\sqrt{P(1-P)/n}$中用$P=24/40=0.6$和$n=40$替代，我们求得$p=0.60\pm0.15$，产生区间(0.45,0.75)．

(b)在99.73%水平上，$z_c=3$．利用公式$p=P\pm z_c\sqrt{P(1-P)/n}$，我们求得$p=0.60\pm0.23$，产生区间(0.37,0.83)．

习题6.27的更精确的公式给出95%置信区间(0.45,0.74)和99.73%置信区间(0.37,0.79)．

差与和的置信区间

6.16　150个标记A的灯泡的样本，显示均值寿命1 400小时和标准差120小时．200个标记B的灯泡的样本，显示寿命均值1 200小时和标准差80小时．对于标记A与B的总体的寿命均值的差，求(a)95%，(b)99%置信限．

解　☞ 对于标记A与B的寿命均值差的置信限由下式给出：

$$\overline{X}_A-\overline{X}_B\pm z_c\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}$$

(a)95%置信限是$1\,400-1\,200\pm1.96\sqrt{(120)^2/150+(80)^2/100}=200\pm24.8$，因此，我们能95%相信总体均值的差属于175与225小时之间．

(b)99%置信限是$1\,400-1\,200\pm2.58\sqrt{(120)^2/150+(80)^2/100}=200\pm32.6$，因此，我们能99%相信总体均值的差属于167与233小时之间．

6.17　在看某一个电视节目的400个成年人和600个青少年的随机样本里，100个成年人和300个青少年表明喜欢它．对于看这个节目并喜欢它的所有成年人和全体青少年的比例差，求(a)95%，(b)99%置信限．

解　☞ 对于两组比例差的置信限由下式给出：

$$P_1-P_2\pm z_r\sqrt{\frac{P_1Q_1}{n_1}+\frac{P_2Q_2}{n_2}}$$

这里下标1和2分别涉及青少年和成年人，且$Q_1=1-P_1$，$Q_2=1-P_2$．$P_1=300/600=0.5$和$P_2=100/400=0.25$分别表示喜欢这个节目的青少年和成年人的比例．

(a)95%置信限：

$$0.50-0.25\pm1.96\sqrt{(0.50)(0.50)/600+(0.25)(0.75)/400}=0.25\pm0.06$$

因此，我们能95%相信比例的真实差属于(0.19,0.31)．

(b)99%置信限：

$$0.50-0.25\pm2.58\sqrt{(0.50)(0.50)/600+(0.25)(0.75)/400}=0.25\pm0.08$$

因此，我们能99%相信比例的真实差属于(0.17,0.33)．

6.18　由一家公司生产的电池的电动势是具有均值45.1伏和标准差0.04伏的正态分布．若将这样的4个电池串联起来，对于总的电动势，求(a)95%，(b)99%，(c)99.73%，(d)50%置信限．

解 ☞ 若 E_1, E_2, E_3 和 E_4 代表这 4 个电池的电动势，我们有

$$\mu_{E_1+E_2+E_3+E_4} = \mu_{E_1} + \mu_{E_2} + \mu_{E_3} + \mu_{E_4} \quad 和 \quad \sigma_{E_1+E_2+E_3+E_4} = \sqrt{\sigma_{E_1}^2 + \sigma_{E_2}^2 + \sigma_{E_3}^2 + \sigma_{E_4}^2}$$

则由于 $\mu_{E_1} = \mu_{E_2} = \mu_{E_3} = \mu_{E_4} = 45.1$ 伏 和 $\sigma_{E_1} = \sigma_{E_2} = \sigma_{E_3} = \sigma_{E_4} = 0.04$ 伏

$$\mu_{E_1+E_2+E_3+E_4} = 4(45.1) = 180.4 \quad 和 \quad \sigma_{E_1+E_2+E_3+E_4} = \sqrt{4(0.04)^2} = 0.08$$

(a)95%置信限是 $180.4 \pm 1.96(0.08) = 180.4 \pm 0.16$ 伏，

(b)99%置信限是 $180.4 \pm 2.58(0.08) = 180.4 \pm 0.21$ 伏，

(c)99.7%置信限是 $180.4 \pm 3(0.08) = 180.4 \pm 0.24$ 伏，

(d)50%置信限是 $180.4 \pm 0.6745(0.08) = 180.4 \pm 0.054$ 伏，值 0.054 称为概差.

方差的置信区间

6.19 200 个电灯泡的样本的寿命标准差算得为 100 小时. 对所有这样的电灯泡的寿命标准差，求(a)95%，(b)99%置信限.

解 ☞ 此为大样本的抽样理论的应用情形. 因此(见表 5-1)对于总体标准差 σ 由 $S \pm z_c\sigma/\sqrt{2n}$ 给出，这里 z_c 指明置信的水平. 我们用样本标准差去估计 σ.

(a)95%置信限是 $100 \pm 1.96(100)/\sqrt{400} = 100 \pm 9.8$，因此，我们能 95% 相信总体标准差属于 90.2 与 109.8 小时之间.

(b)99%置信限是 $100 \pm 2.58(100)/\sqrt{400} = 100 \pm 12.9$，因此，我们能 99% 相信总体标准差属于 87.1 与 112.9 小时之间.

6.20 在习题 6.19 中的灯泡样本量要取多大，才能以 99.73% 的置信保证总体的标准差与样本的标准差相差不超过(a)5%，(b)10%？

解 ☞ 在习题 6.19 中，对于 σ 的 99.73% 置信限是 $s \pm 3\sigma/\sqrt{2n} = s \pm 3s\ \sqrt{2n}$，利用 s 作为 σ 的估计，则标准差的百分数误差是

$$\frac{3s/\sqrt{2n}}{s} = \frac{300}{\sqrt{2n}}\%$$

(a)若 $300/\sqrt{2n} = 5$，则 $n = 1800$. 因此，样本的大小应该是 1800 或更大.

(b)若 $300/\sqrt{2n} = 10$，则 $n = 450$. 因此，样本大小应该是 450 或更大.

6.21 在 1000 个男性学生的学校里随机地选择的 16 个男性学生的身高的标准差是 2.40 英寸. 对于该校的全体男性学生，求标准差的(a)95%，(b)99%置信限.

解 ☞ (a)95%置信限由 $S\sqrt{n}/\chi_{0.975}$ 和 $S\sqrt{n}/\chi_{0.025}$ 给出.

对于 $\nu = 16 - 1$ 个自由度，$\chi_{0.975}^2 = 27.5$ 或 $\chi_{0.975} = 5.24$ 和 $\chi_{0.025}^2 = 6.26$ 或 $\chi_{0.025} = 2.50$，则 95% 置信限是 $2.40\sqrt{16}/5.24$ 和 $2.40\sqrt{16}/2.50$，即，1.83 和 3.84 英寸. 因此，我们能 95% 相信总体标准差属于 1.83 与 3.84 英寸之间.

(b)99%置信限由 $S\sqrt{n}/\chi_{0.995}$ 和 $S\sqrt{n}/\chi_{0.005}$ 给出.

对于 $\nu = 16 - 1 = 15$ 个自由度. $\chi_{0.995}^2 = 32.8$ 或 $\chi_{0.995} = 5.73$ 和 $\chi_{0.005}^2 = 4.60$ 或 $\chi_{0.005} = 21.4$，则 99% 置信限是 $2.40\sqrt{16}/5.73$ 和 $2.40\sqrt{16}/2.14$，即，1.68 和 4.49 英寸. 因此，我们能 99% 相信总体标准差属于 1.68 与 4.49 英寸之间.

6.22 利用小样本的或精确的抽样理论解决习题 6.19.

解 ☞ (a)95%置信限是由 $S\sqrt{n}/\chi_{0.975}$ 和 $S\sqrt{n}/\chi_{0.025}$ 给出.

对于 $\nu = 200 - 1 = 199$ 个自由度，在习题 4.41 中我们求得

$$\chi_{0.975}^2 = \frac{1}{2}(z_{0.975} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \frac{1}{2}(1.96 + 19.92)^2 = 239$$

$$\chi_{0.025}^2 = \frac{1}{2}(z_{0.025} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \frac{1}{2}(-1.96 + 19.92)^2 = 161$$

从而 $\chi_{0.975} = 15.5$ 和 $\chi_{0.025} = 12.7$，则 95% 置信限分别是 $100\sqrt{200}/15.5 = 91.2$ 和 $100\sqrt{200}/12.7 = 111.3$ 小时. 因此，我们可 95% 相信总体标准差属于 91.2 与 111.3 小时之间.

这应与习题 6.19(a)的结果作比较.

(b)99% 置信限是由 $S\sqrt{n}/\chi_{0.995}$ 和 $S\sqrt{n}/\chi_{0.005}$, 对于 $\nu=200-1=199$ 个自由度,

$$\chi^2_{0.995}=\frac{1}{2}(z_{0.995}+\sqrt{2(199)-1})^2=\frac{1}{2}(2.58+19.92)^2=253$$

$$\chi^2_{0.005}=\frac{1}{2}(z_{0.005}+\sqrt{2(199)-1})^2=\frac{1}{2}(-2.58+19.92)^2=150$$

从而 $\chi_{0.995}=15.9$ 和 $\chi_{0.005}=12.2$, 则 99% 置信限分别是 $100\sqrt{200}/15.9=88.9$ 和 $100\sqrt{200}/12.2=115.9$ 小时. 因此, 我们可相信总体标准差属于 88.9 与 115.9 小时之间.

这应与习题 6.19(b)的结果作比较.

方差比的置信区间

6.23 大小分别为 16 和 10 的两个样本, 随机地取自正态的总体. 若它们的方差分别是 24 和 18, 对于方差比, 求(a)98%, (b)90% 置信限.

解 ☞ (a)我们有 $m=16, n=10, s_1^2=20, s_2^2=18$, 因此

$$\hat{s}_1^2=\frac{m}{m-1}s_1^2=\frac{16}{15}\times 24=25.2$$

$$\hat{s}_2^2=\frac{n}{n-1}s_2^2=\frac{10}{9}\times 18=20.0$$

根据习题 4.47(b), 对于 $\nu_1=16-1=15$ 和 $\nu_2=10-1=9$ 个自由度, 我们有 $F_{0.99}=4.96$, 也根据习题 4.47(d), 对于 $\nu_1=15$ 和 $\nu_2=9$ 个自由度, 我们有 $F_{0.01}=1/3.89$, 从而 $1/F_{0.01}=3.89$, 则利用本章正文(17)式, 我们求得 98% 置信区间

$$\frac{1}{4.96}\times\frac{25.2}{20.0}\leqslant\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\leqslant 3.89\times\frac{25.2}{20.0}$$

或

$$0.283\leqslant\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\leqslant 4.90$$

(b)如(a), 根据附录 F 我们求得 $F_{0.95}=3.01$ 和 $F_{0.05}=1/2.59$. 因此, 90% 置信区间是

$$\frac{1}{3.01}\times\frac{25.2}{20.0}\leqslant\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\leqslant 2.59\times\frac{25.2}{20.0}$$

或

$$0.4186\leqslant\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\leqslant 3.263$$

注意到, 90% 置信区间比 98% 置信区间小得多. 当然这正是我们所期望的.

6.24 在习题 6.23 中对于标准差的比, 求(a)98%, (b)90% 置信限.

解 ☞ 对习题 6.23 中的不等式取平方根, 我们求得对于 98% 和 90% 置信限

(a)
$$0.53\leqslant\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\leqslant 2.21$$

(b)
$$0.65\leqslant\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\leqslant 1.81$$

最大似然估计

6.25 假设 n 个观测值 $X_1,\cdots,X_n$ 是根据均值未知而方差已知的正态分布总体得到的. 求均值的最大似然估计.

解 ☞ 由于

$$f(x_k,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x_k-\mu)^2/2\sigma^2}$$

我们有

(1)
$$L=f(x_1,\mu)\cdots f(x_n,\mu)=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}e^{-\sum(x_k-\mu)^2/2\sigma^2}$$

因此,

(2)
$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_k-\mu)^2$$

对 μ 求偏导数产生

(3) $$\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \mu}=\frac{1}{\sigma^2}\sum(x_k-\mu)$$

令 $\frac{\partial L}{\partial \mu}=0$ 给出

(4) $$\sum(x_k-\mu)=0,\quad 即\quad \sum x_k-n\mu=0$$

或

(5) $$\mu=\frac{\sum x_k}{n}$$

因此,最大似然估计是样本均值.

6.26 若在习题 6.25 中均值是已知的而方差是未知的,求方差的最大似然估计.

解 ☞ 若我们用 $f(x_k,\sigma^2)$ 代替 $f(x_k,\mu)$,像习题 6.25 所做的那样,仍会出现方程(2),则对 σ^2 求偏导数,我们有

$$\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}+\sum(x_k-\mu)^2$$

令 $\partial L/\partial\sigma^2=0$,我们求得

$$\sigma^2=\frac{\sum(x_k-\mu)^2}{n}$$

综合问题

6.27 (a)若 P 是在大小为 n 的样本中所观测到的成功的比例,试证明真正的成功率 p 的置信限由下式给出,其中临界值 z_c 确定置信水平

$$\frac{P+\dfrac{z_c^2}{2n}\pm z_c\sqrt{\dfrac{P(1-P)}{n}+\dfrac{z_c^2}{4n^2}}}{1+\dfrac{z_c^2}{n}}$$

(b)利用在(a)中导出的公式来求得习题 6.13 的 99.73% 置信限.(c)描述对于大的 n 将(a)中的公式化成 $P\pm z_c\sqrt{P(1-P)/n}$,如在习题 6.13 中所作的那样.

解 ☞ (a)在标准单位中的样本比例 P 是

$$\frac{P-p}{\sigma_P}=\frac{P-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

这个标准变量的最大和最小值是 $\pm z_c$,这里 z_c 确定置信水平.因此,在这些极值处有

$$P-p=\pm z_c\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

两边平方,

$$P^2-2pP+p^2=z_c^2\frac{p(1-p)}{n}$$

用 n 乘两边并简化,我们求得

$$(n+z_c^2)p^2-(2nP+z_c^2)p+nP^2=0$$

若 $a=n+z_c^2$, $b=-(2nP+z_c^2)$ 且 $c=nP^2$,该方程变成 $ap^2+bp+c=0$,对于 p 的解由以下二次公式给出

$$p=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2nP+z_c^2\pm\sqrt{(2nP+z_c^2)^2-4(n+z_c^2)(nP^2)}}{2(n+z_c^2)}$$

$$=\frac{2nP+z_c^2\pm z_c\sqrt{4nP(1-P)+z_c^2}}{2(n+z_c^2)}$$

用 $2n$ 除分子和分母,该式变成

$$p=\frac{P+\dfrac{z_c^2}{2n}\pm z_c\sqrt{\dfrac{P(1-P)}{n}+\dfrac{z_c^2}{4n^2}}}{1+\dfrac{z_c^2}{n}}$$

(b)对于 99.73% 置信限，$z_c=3$. 则利用在(a)中导出的公式，其中 $P=0.55$ 和 $n=100$，我们求得 $p=0.40$和 0.69 与习题 6.13(c)一致.

(c)若 n 是大的，则 $z_c^2/2n$，$z_c^2/4n^2$ 和 z_c^2/n 都是可忽略地小且基本上可用零替代，因此得到要求的结果.

6.28 能得到一个总体标准差的 95% 置信区间，其期望宽度比在习题 6.22(a)中找到的更小吗？

解 ☞ 对于在习题 6.22(a)中求得的总体标准差的 95% 置信限是由选择在每一个尾部面积是 2.5% 的 χ^2 的临界值而得到的. 用选择在尾部的面积和是 5% 的 χ^2 的临界值去求得另外的 95% 置信限是可能的，但是在每一个尾部这样的面积是不相等的.

在表 6-2 里，已得到若干这样的临界值，和其对应的 95% 置信区间.

表 6-2

临界值	95% 置信区间	宽度
$\chi_{0.01}=12.44$, $\chi_{0.96}=15.32$	92.3 至 113.7	21.4
$\chi_{0.02}=12.64$, $\chi_{0.97}=15.42$	91.7 至 111.9	20.2
$\chi_{0.03}=12.76$, $\chi_{0.98}=15.54$	91.0 至 110.8	19.8
$\chi_{0.04}=12.85$, $\chi_{0.99}=15.73$	89.9 至 110.0	20.1

从该表可看出一个 95% 置信区间(91.0,110.8)的宽度仅 19.8. 继续使用同样方法，利用临界值 $\chi_{0.031}$与 $\chi_{0.981}$，$\chi_{0.032}$与 $\chi_{0.982}$，甚至能找到宽度更小的区间. 但是一般说来，这样得到的区间的减小，通常是可以忽略的且不值得花费劳动.

补 充 习 题

无偏和有效估计

6.29 重量分别确定为 8.3,10.6,9.7,8.8,10.2 和 9.4 磅的样本的测量值，确定(a)总体均值，(b)总体方差的无偏和有效估计，(c)比较该样本标准差与估计的总体标准差.

6.30 由一家公司生产的 10 个电视显像管的样本显示 1 200 小时的寿命均值和 100 小时的标准差. 估计由该公司生产的所有的电视显像管的总体的(a)均值，(b)标准差.

6.31 (a)若对于 30,50 和 100 个电视显像管得到相同的结果，做习题 6.30，(b)对于不同的样本容量关于样本标准差与总体标准差的估计之间的关系你能断定什么？

均值的置信区间估计(大样本)

6.32 每根缆绳都有支承的最大载荷，60 根缆绳最大载荷均值和标准差分别是 11.09 吨和 0.73 吨. 求由该公司生产的任一根缆绳的最大载荷均值的(a)95%，(b)99% 置信限.

6.33 由一家公司制造的 250 个铆钉头样本的直径的均值和标准差分别是 0.72642 英寸和 0.00058 英寸(见习题 5.100). 对于由该公司制造的所有的铆钉头的平均直径，求(a)99%，(b)98%，(c)95%，(d)90% 置信限.

6.34 求对于习题 6.33 中的平均直径的(a)50% 置信限，(b)概差.

6.35 若估计电视显像管的寿命标准差是 100 个小时，我们要取多大的样本才能使(a)95%，(b)90%，(c)99%，(d)99.73% 置信估计的均值寿命误差不超过 20 小时.

6.36 若估计的均值寿命必须不超过 10 小时，习题 6.35 中的样本容量应是多少？

均值的置信区间估计(小样本)

6.37 对棉线的断裂强度有 12 个测量值样本，其均值为 7.38 盎司，标准差为 1.24 盎司. 对于实际的断裂强度均值，求(a)95%，(b)90% 置信限.

6.38 假设大样本的抽样理论的方法是适用的，用它做习题 6.37，并比较得到的结果.

6.39 对个体确定刺激的反应时间的 5 个测量记录为 0.28,0.30,0.27,0.33,0.31 秒.对于实际的均值反应时间,求(a)95%,(b)99%置信限.

比例的置信区间估计

6.40 一个罐子里装着比例是未知的红弹子和白弹子,有放回地从罐里挑选 60 个弹子的随机样本,它显示 70%是红的.对于罐里红弹子的实际的比例,求(a)95%,(b)99%,(c)99.73%置信限.利用近似公式和习题 6.27 的更精确的公式表出结果.

6.41 在习题 6.40 中的弹子样本量要取多大,才能以(a)95%,(b)99%,(c)99.73%置信使总体比例与样本比例相差不超过 5%?

6.42 相信选举结果将产生子票数很接近的两个候选人之一.试用一个例子作解释,且陈述所有的假定,为达到(a)80%,(b)95%,(c)99%置信确定两个候选人中的一个,你决定至少要有多少人参加投票?

差与和的置信区间

6.43 两个类似的病人组 A 和 B.它们分别由 50 个和 100 个病人组成,第一组给的是新型的睡眠药,第二组给的是常规药.对于 A 组的病人睡眠的钟点数均值是 7.82 和 0.24 小时的标准差.对于 B 组的病人睡眠的钟点数均值是 6.75 和 0.30 小时的标准差.对于由两种睡眠药产生的睡眠钟点数均值的差,求(a)95%和(b)99%置信限.

6.44 由一个机器生产的 200 个插销的样本显示 15 个是有缺陷的,而由另一个机器生产的 100 个插销显示 12 个是有缺陷的.对于由两个机器生产的有缺陷的插销的比例差,求(a)95%,(b)99%,(c)99.73%置信限.

6.45 一个公司制造的球轴承有 0.638 盎司的重量均值和 0.012 盎司的标准差.对于 100 个球轴承组成的总重量,求(a)95%,(b)99%置信限.

方差或标准差的置信区间

6.46 由一家公司测试的 100 条钢丝绳的抗断强度的标准差是 1800 磅.对于由该公司生产的全部钢丝绳的标准差,求(a)95%,(b)99%,(c)99.73%置信限.

6.47 要取多大的样本量,才能以(a)95%,(b)99%,(c)99.73%置信使总体标准差与样本标准差相差不超过 2%?

6.48 由一家公司制造的 10 个电灯泡的寿命的标准差是 120 个小时.对于该公司制造的全部电灯泡的标准差,求(a)95%,(b)99%置信限.

6.49 若 25 个电灯泡显示 120 个小时的标准差,做习题 6.48.

6.50 若 100 个电灯泡显示 120 个小时的标准差,利用 χ^2 分布做习题 4.48.

方差比的置信区间

6.51 由两个机器生产的球轴承的直径的标准差分别求得是 0.042 厘米和 0.035 厘米,这些值均是由容量为 10 的样本求得的.对于方差的比,求(a)98%,(b)90%置信区间.

6.52 在习题 6.51 中,对于标准差的比,确定(a)98%,(b)90%置信区间.

6.53 两个大小分别是 6 和 8 的样本,表明它们有相同的方差.对于提取样本的总体的方差的比,求(a)98%,(b)90%置信区间.

6.54 若每个样本都有相同的容量 120,做(a)习题 6.51,(b)习题 6.53.

最大似然估计

6.55 假设 n 个观测值,$X_1,\cdots,X_n$ 是从具有未知的参数 λ 的泊松分布抽取的.求 λ 的最大似然估计.

6.56 一个总体有一个密度函数 $f(x)=2\nu\sqrt{\nu/\pi}x^2e^{-\nu x^2}$, $-\infty<x<\infty$, n 个观测值 $X_1,\cdots,X_n$ 是从这个总体抽取的.求 ν 的最大似然估计.

6.57 一个总体有以下密度函数

$$f(x)=\begin{cases}(k+1)x^k, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

n 个观测值 $X_1,\cdots,X_n$ 是从总体抽取的,求 k 的最大似然估计.

综合问题

6.58 对于正态分布的 99%置信系数(两个尾部的)是 ±2.58.若(a)$\nu=4$,(b)$\nu=12$,(c)$\nu=25$,(d)$\nu=30$,(e)$\nu=40$,则对于 t 分布的对应系数是什么?

6.59 某公司有 500 条钢丝绳,随机选择的 40 条钢丝绳的检测显示 2400 磅的均值抗断强度和 150 磅的标准差,(a)对于乘余 460 条钢丝绳估计均值抗断强度,什么是 95%和 99%置信限?(b)具有什么置信度能使我们说剩余 460 根缆绳的均值抗断强度是 2400±35 磅?

补充习题答案

6.29 (a)9.5 磅,(b)0.74 磅^2,(c)0.78 和 0.86 磅

6.30 (a)1 200 小时,(b)105.4 小时

6.31 (a)对于样本大小为 30,50 和 100 个电子管的总体标准差的估计分别是 101.7,101.0 和 100.5 个小时,在所有的情形里,总体均值的估计是 1 200 个小时.

6.32 (a)11.09±0.18 吨,(b)11.09±0.24 吨

6.33 (a)0.72642±0.000095 英寸,(b)0.72642±0.000085 英寸,(c)0.72642±0.000072 英寸,(d)0.72642±0.000060 英寸

6.34 (a)0.72642±0.000025 英寸,(b)0.000025 英寸

6.35 (a)至少 97,(b)至少 68,(c)至少 167,(d)至少 225

6.36 (a)至少 385,(b)至少 271,(c)至少 666,(d)至少 900

6.37 (a)7.38±0.82 盎司,(b)7.38±1.16 盎司

6.38 (a)7.38±0.70 盎司,(b)7.38±0.96 盎司

6.39 (a)0.298±0.030 秒,(b)0.298±0.049 秒

6.40 (a)0.70±0.12,0.69±0.11,(b)0.70±0.15,0.68±0.15,(c)0.70±0.18,0.67±0.17

6.41 (a)至少 323,(b)至少 560,(c)至少 756

6.43 (a)1.07±0.09 小时,(b)1.07±0.12 小时

6.44 (a)0.045±0.073,(b)0.045±0.097,(c)0.045±0.112

6.45 (a)63.8±0.24 盎司,(b)63.8±0.31 盎司

6.46 (a)1 800±249 磅,(b)1 800±328 磅,(c)1 800±382 磅

6.47 (a)至少 4 802,(b)至少 8 321,(c)至少 11,250

6.48 (a)87.0 至 230.9 小时,(b)78.1 至 288.5 小时

6.49 (a)95.6 至 170.4 小时,(b)88.9 至 190.8 小时

6.50 (a)106.1 至 140.5 小时,(b)102.1 至 148.1 小时

6.51 (a)0.269 至 7.70,(b)0.453 至 4.58

6.52 (a)0.519 至 2.78,(b)0.673 至 2.14

6.53 (a)0.140 至 11.025,(b)0.264 至 5.124

6.54 (a)0.941 至 2.20,1.067 至 1.944,(b)0.654 至 1.53,0.741 至 1.35

6.55 $\lambda=(\sum x_k)/n$

6.56 $\nu=\dfrac{3n}{2(x_1^2+\cdots+x_n^2)}$

6.57 $k=-1-\dfrac{n}{\ln(x_1\cdots x_n)}$

6.58 (a)±4.60,(b)±3.06,(c)±2.79,(d)±2.75,(e)±2.70

6.59 (a)2400±45 磅,2400±59 磅,(b)87.6%

第七章 假设检验和显著性

统计决策

在实际工作中经常需要我们根据样本信息作出关于总体的决策.这样的决策称为统计决策.例如,我们可以根据样本数据决定一种新的血清在医治一种病时是否真的有效,是否一种教育程序比另一种好,是否一枚给定的硬币均匀正常,等等.

统计假设、零假设

在企图作出决策时,对总体做出一些假定或一些猜测是有用的.这些假定可能是真的,也可能不是真的,称它们为统计假设,一般这些假设是关于总体概率分布的一些状况.

例如,如果我们想要决定一枚硬币是否均匀正常,我们构造一个假设,认为硬币是均匀的,也就是正面出现的概率 $p=0.5$.类似地,我们想要决定一个程序比另一个好,我们构造一个假设,认为两个程序间无差异(由于从同一个总体中抽样的影响,两者间任何可见的差异应是微小的).这样的假设常称为零假设或简单假设,记为 H_0.

与给定的零假设不同的任一个假设称为一个备择假设.例如,如果零假设是 $p=0.5$,可能的备择假设有 $p=0.7$, $p\neq 0.5$ 或 $p>0.5$ 等.相对于零假设一个备择假设记为 H_1.

假设检验和显著性

如果认为一个特定的假设是真的,我们发现在随机样本中看到的结果,与在这一假设下期望的结果有明显的不同,而期望结果是根据使用抽样理论计算的可能性确定的.我们应该说看到的差异是显著的,从而主张拒绝该假设(或至少在所看到的证据下不接收该假设).例如,如果一枚硬币掷 20 次,出现 16 个正面,我们应该主张拒绝硬币为均匀的假设,虽然可以想到我们可能犯了错误.

这样的程序称为假设检验,或显著性检验,或决策规则.这个程序足以使我们决定是接收还是拒绝假设,决定观测样本是否与期望的结果有显著性差异.

第一类和第二类错误

如果某一假设是真的,而我们拒绝这个假设,则我们称做出了第一类错误.反之如果假设是假的应该被拒绝,而我们接收了这个假设,则我们称做出了第二类错误.在这两种情形会出现一个错误的决策或判断错误.

为了使一个假设检验或决策规则是好的,必须设计得使它的决策错误最小化.但这并不是一个很简单的事情,因为对给定的样本量,当企图降低某一类错误时,一般伴随着会使另一类错误增大.在实际工作中,犯某一类错误会比犯另一类错误后果更严重,因此一个折衷的办法是适宜地限制要求更严的那一类错误.同时降低两类错误的方法只能是增加样本量.这样做有时可能、有时不可能.

显著性水平

在检验一个给定假设时,我们可能会犯的第一类错误的最大概率称为检验的显著性水平.这个概率经常在抽取一个样本前被给定,所以抽样获得的结果不会影响我们的决策.

实践中显著性水平习惯上用 0.05 或 0.01,个别的时候也可能用其他值.例如,如果按照选定的 0.05 或 5% 显著性水平设计一个假设检验,那么在 100 次中有大约 5 次机会,使我们在应接收该假设时而拒绝了它.也就是说,在零假设是真时,我们大约有 95% 的信心可以做出

正确决策,这时我们说在 0.05 的显著性水平拒绝该假设,这意味着我们能有 0.05 的概率是错误的.

有关正态分布的检验

为了说明上面提到的概念,假定在一个给定假设下,统计量 S 的抽样分布是正态分布,均值为 μ_S,标准差为 σ_S.同时假定当 S 太小或太大时,我们决定拒绝该假设.标准化变量 $Z=(S-\mu_S)/\sigma_S$ 的分布是图 7-1 所示的标准正态分布(均值 0,方差 1).Z 的极端值应导致拒绝该假设.

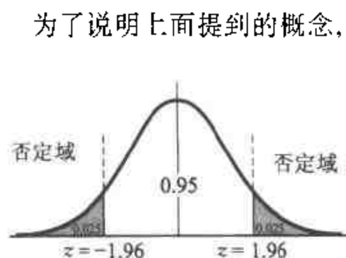


图 7-1

如图所示,我们能够有 95% 的信心认为,如果该假设是真的,一个实现的样本统计量 S 的 z 值将会在 -1.96 和 1.96 之间(因为正态曲线下这两个值间的面积为 0.95).

然而,如果对所选的单个随机样本,这个统计量的 z 值在区域 -1.96 至 1.96 之外,我们会归纳出:如果给定的假设是真的,这样的事件发生的概率仅有 0.05(图中全部阴影面积).那么我们会说这个 z 值与在该假设下所能期望的值显著地不同,我们会主张拒绝该假设.

全部的阴影面积 0.05 是检验的显著性水平,它指明了在拒绝假设时我们犯错误的概率,也就是犯第一类错误的概率.因此,我们常说该假设在 0.05 的显著性水平下被拒绝,或者说这个给定样本的统计量的 z 值在 0.05 显著水平下是显著的.

区域 -1.96 至 1.96 以外的 z 值集合构成了所谓否定域,或拒绝域,或显著性区域.区域 -1.96 至 1.96 内的 z 值的集合称为假设的接收域,或非显著性区域.

基于前面的说明可以构成下述决策规则:

(a)如果统计量 S 的 z 值落在区域 -1.96 至 1.96 之外(即 $z>1.96$ 或 $z<-1.96$),则在 0.05 显著性水平下拒绝该假设.这等价于说观测到的样本统计量在 0.05 水平下是显著的.

(b)否则接收该假设(或者,如果愿意的话,不做任何决策).

应该注意其他的显著性水平也能被使用.例如,如果用 0.01 水平,则上面的 1.96 应替换为 2.58(参看图 7-1).第六章表 6-1 可以使用,因为显著性水平与置信水平之和为 100%.

单侧和双侧检验

上面显示的检验中,兴趣集中在统计量 S 或对应的 z 值的期望值两侧的极端值,也就是分布的两侧尾部,因此这样的检验称为双侧检验或双边检验.

然而,我们常仅对期望值一侧的极端值感兴趣,也就是只看分布的一侧尾部.例如,当我们检验一个过程比另一个好的假设时(它和检验一个过程是否比另一个好或坏是有差异的),这样的检验称为单侧检验或单边检验.这时否定域是分布一侧的一个区域,其面积等于显著性水平.

表 7-1 给出了在不同显著性水平下,单侧和双侧检验 z 的否定域临界值,该表有参考价值.对其他显著性水平 z 的否定域临界值可用正态概率分布表获得.

表 7-1

显著性水平 α	0.10	0.05	0.01	0.005	0.002
单侧 z 的临界值	-1.28 或 1.28	-1.645 或 1.645	-2.33 或 2.33	-2.58 或 2.58	-2.88 或 2.88
双侧 z 的临界值	-1.645 和 1.645	-1.96 和 1.96	-2.58 和 2.58	-2.81 和 2.81	-3.08 和 3.08

***P* 值**

在许多检验中,我们常考虑零假设 H_0 是认为总体参数有一个特定的值,而备择假设 H_1

会有下面的某一种考虑：

(i)该参数比所述特定值大(右侧检验).

(ii)该参数比所述特定值小(左侧检验).

(iii)该参数大于或小于所述特定值(双侧检验).在(i)和(ii), H_1 对参数是单方向的;在(iii), H_1 是双方向的.在进行检验和计算统计量 S 之后,检验的 P 值就是一个概率值,这个概率是:如果 H_0 为真,在 H_1 指示的方向实际出现的 S 值作为极端值可能出现的概率.

例如,假定正态总体的标准差 σ 已知是 3, H_0 认为均值 μ 等于 12,从总体中抽取大小 36 的一个随机样本,样本均值为 $\bar{x}=12.95$.检验统计量选用

$$Z=\frac{\overline{X}-12}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-12}{0.5}$$

当 H_0 为真时,这是一个标准正态随机变量. Z 的实现值是 $(12.95-12)/0.5=1.9$,那么检验的 P 值,依据备择假设 H_1 如下:

(i)对 $H_1:\mu>12$(上述情形(i)), P 值是一个概率,即均值真值是 12 时,大小为 36 的随机样本产生样本均值超过 12.95 的概率,也就是 $P(Z\geqslant1.9)=0.029$.换句话说,就是如果 $\mu=12$ 在 100 次中大约有 3 次使 $\bar{x}\geqslant12.95$.

(ii)对 $H_1:\mu<12$(上述情形(ii)),检验的 P 值为均值真值是 12 时,大小为 36 的随机样本产生的样本均值不超过 12.95 的概率,也就是 $P(Z\leqslant19)=0.97$,或者说如果 $\mu=12$,在 100 次中大约有 97 次机会使 $\bar{x}\leqslant12.95$.

(iii)对 $H_1:\mu\neq12$(上述情形(iii)), P 值为均值真值是 12 时,大小为 36 的随机样本产生的样本均值离开 12 超过 0.95 单位的概率,也就是 $\bar{x}\geqslant12.95$ 或 $\bar{x}\leqslant11.05$ 的概率.这时 P 值为 $P(Z\leqslant-1.9)+P(Z\geqslant1.9)=0.057$,这就是说当 $\mu=12$ 时,在 100 次中大约有 6 次机会使 $|\bar{x}-12|\geqslant0.095$.

小的 P 值提供了倾向于备择假设拒绝零假设的证据,而大的 P 值提供了不倾向备择假设不拒绝零假设的证据.在情形(i)有小的 P 值 0.029,它是一个相当强的指示器,指明总体均值比 12 要大.在情形(ii),大的 P 值 0.97 强烈地建议不应拒绝 $H_0:\mu=12$ 而去支持 $H_1:\mu<12$.在情形(iii), P 值 0.057 提供了一个拒绝 H_0 而支持 $H_1:\mu\neq12$ 的证据,但是不如为了拒绝 H_0 支持 $H_1:\mu>12$ 的证据那么强.

应该认识到, P 值和显著性水平并不能由零假设自身提供拒绝或不拒绝零假设的准则,而是提供了相对于支持备择假设,拒绝或不拒绝零假设的准则.如上面的例子说明的,同样的检验结果和显著性水平,在考虑同一个零假设相对于不同的备择假设时,会招致不同的结论.

当检验统计量 S 是标准正态随机变量时,附录 C 中的表对计算 P 值是足够了,但是当 S 是 t, F 或卡方随机变量时,对不同的自由度有不同的分布,附录 D, E 和 F 中的那些表可能不够,为计算 P 值将需要软件或更大的表.

大样本的一些特殊的显著性检验

对大样本许多统计量 S 有近似正态分布,均值为 μ_S,标准差为 σ_S,这时我们可以利用上述结果构成决策规则或显著性假设检验,以下几个特殊情形是实际工作中常用的统计量,每一个情形的结果均对无穷总体或有放回抽样成立,对有限总体无放回抽样,这些结果需要进行修正,参看第五章.

1. 样本均值.　此时 $S=\overline{X}$ 是样本均值, $\mu_S=\mu_{\overline{X}}=\mu$. μ 为总体均值; $\sigma_S=\sigma_{\overline{X}}=\sigma/\sqrt{n}$, σ 为总体标准差,而 n 为样本容量.标准化的变量为

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{1}$$

必要时可以用观测样本的标准差 s(或 $\hat{s}$)代替 σ.

为了检验零假设 H_0:总体均值为 $\mu=a$,我们可以使用统计量(1),此时如果备择假设是 $\mu\neq a$,使用双侧检验,若一个特定的容量为 n 的样本均值为 $\bar{x}$,当

$$-1.96\leqslant\frac{\bar{x}-a}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant 1.96 \tag{2}$$

时,我们将在 0.05 水平接收 H_0(或至少不拒绝 H_0),否则拒绝 H_0.对其他显著性水平可适当改变(2)式.如果与 H_0 对立的备择假设是总体均值大于 a,使用单侧检验,若(参看表7-1)

$$\frac{\bar{x}-a}{\sigma/\sqrt{n}}<1.645 \tag{3}$$

将在 0.05 水平接收 H_0(或至少不拒绝),否则拒绝 H_0.如果与 H_0 对立的备择假设是总体均值小于 a,若

$$\frac{\bar{x}-a}{\sigma/\sqrt{n}}>-1.645 \tag{4}$$

将在 0.05 水平接收 H_0.

2. 比例. 此时 $S=P$,样本中“成功”的比例;$\mu_S=\mu_P=p$, p 是总体中成功的比例,而 n 是样本容量;$\sigma_S=\sigma_P=\sqrt{pq/n}$,这里 $q=1-p$.标准化的变量为

$$Z=\frac{P-p}{\sqrt{pq/n}} \tag{5}$$

此时 $P=X/n$, X 为样本中实际的成功次数,(5)式变成

$$Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}} \tag{6}$$

与上面对样本均值检验完全类似,可以做单侧或双侧检验.

3. 样本均值的差. 设 $\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$ 分别是容量为 n_1 和 n_2 的大样本的样本均值,而总体分别有均值 μ_1 和 μ_2 及标准差 σ_1 和 σ_2.零假设是两个总体均值间没有差异,即 $\mu_1=\mu_2$.从第五章(11)式,当 $\mu_1=\mu_2$ 时,样本均值之差的抽样分布是近似正态分布,均值和标准差为

$$\mu_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}=0,\qquad \sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \tag{7}$$

上式中如果需要,我们可以用观测的样本标准差 s_1 和 s_2(或 $\hat{s}_1$ 和 $\hat{s}_2$)代替 σ_1 和 σ_2.

使用标准化的变量

$$Z=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-0}{\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}}=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}} \tag{8}$$

按照上面部分 1 中描述的方法,可以在适当的显著性水平下检验相对于各种备择假设(或某种观测差异的显著性)的零假设.

4. 比例的差. 设 p_1 和 p_2 是观测的样本比例,样本分别来自比例为 p_1 和 p_2 的总体,大样本的样本容量为 n_1 和 n_2.考虑零假设:总体比例间没有差异,即 $p_1=p_2$.这样的话,两个样本实际上取自同一个总体.

从第五章(13)式,在 $p_1=p_2-p$ 时,样本比例之差的抽样分布是近似正态的,均值和标准差为

$$\mu_{P_1-P_2}=0,\quad \sigma_{P_1-P_2}=\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \tag{9}$$

其中,可以用 $\overline{P}=\frac{n_1P_1+n_2P_2}{n_1+n_2}$ 作为总体比例 p 的一个估计.

使用标准化的变量

$$Z=\frac{P_1-P_2-0}{\sigma_{P_1-P_2}}=\frac{P_1-P_2}{\sigma_{P_1-P_2}} \tag{10}$$

能够在适当水平下,检验观测的差异,也就是检验零假设.

可以类似地设计其他一些统计量(参看第五章表 5-1).

对正态样本的一些特殊的显著性检验

在小样本情形($n<30$),可以使用正态以外的其他分布构造假设显著性检验,这些分布有学生氏 t、卡方、F 分布等.这些涉及一些精确的抽样理论,当然如果样本量很大,他们将简化为上面的一些情况.

1. 样本均值. 检验假设 H_0:正态总体有均值 μ,使用

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n-1}=\frac{\overline{X}-\mu}{\hat{S}}\sqrt{n} \tag{11}$$

这里 $\overline{X}$ 是样本均值,n 是样本容量.除了使用 $\hat{S}=\sqrt{n/(n-1)}S$ 代替 σ 外,这一统计量与样本量 n 较大时的标准化变量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 是相似的,两者的差别是 Z 为正态分布,而 T 为学生氏 t 分布、当 n 增大时,两者将趋于一致.与上一段中样本均值的那些假设检验类似,在 Z 临界值的地方使用 t 临界值,做各种假设检验.

2. 样本均值的差. 设从标准差相等的两个正态总体(或近似正态),分别抽取容量为 n_1 和 n_2 的两个样本,这时 $\sigma_1=\sigma_2$.两个样本的均值和标准差分别记为 $\overline{X}_1,\overline{X}_2$ 和 S_1,S_2.为检验假设 H_0:样本来自相同的总体(即 $\sigma_1=\sigma_2$ 的同时有 $\mu_1=\mu_2$),使用变量

$$T=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}},\text{其中 }\sigma=\sqrt{\frac{n_1S_1^2+n_2S_2^2}{n_1+n_2-2}} \tag{12}$$

这个 T 的分布是学生氏 t 分布,自由度 $\nu=n_1+n_2-2$.上面的(12)式与第五章(12)式相像,在 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ 的地方使用 σ 的一个估计,σ^2 估计是一个加权平均

$$\frac{(n_1-1)\hat{S}_1^2+(n_2-1)\hat{S}_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}=\frac{n_1S_1^2+n_2S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

其中 $\hat{S}_1^2$ 和 $\hat{S}_2^2$ 是 σ_1^2 和 σ_2^2 的无偏估计.这是根据组合资料获得的协同方差.

3. 方差. 为检验 H_0:正态分布有方差 σ^2.考虑随机变量

$$\chi^2=\frac{nS^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \tag{13}$$

此统计量有卡方分布,自由度为 $n-1$(参看第五章),因此,一个容量为 n 的随机样本算出的样本方差为 s^2,则 0.05 水平的一个双侧检验,接收 H_0(至少是不拒绝)的区域为

$$\chi_{0.025}^2\leqslant\frac{ns^2}{\sigma^2}\leqslant\chi_{0.975}^2 \tag{14}$$

否则拒绝 H_0.对 0.01 或其他水平可获得类似的结果.

为了检验假设 H_1:总体的方差不大于 σ^2.我们仍然可使用上面的零假设 H_0,但应采用单侧检验.如果所算出的样本方差 s^2 使得

$$\frac{ns^2}{\sigma^2}>\chi_{0.95}^2 \tag{15}$$

我们将在 0.05 水平拒绝 H_0(此时结论是 H_1 正确),否则应接收 H_0(至少不拒绝 H_0).

4. 方差的比. 在某些问题中,我们希望知道两个样本是否来自有相等方差的正态总体,这两个样本的容量分别为 m 和 n,测得的样本方差为 s_1^2 和 s_2^2,此时使用统计量(参看第五章)

$$F=\frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2} \tag{16}$$

这里 σ_1^2,σ_2^2 是抽取样本的两个正态总体的方差.零假设 H_0:两个总体方差不存在差异,即 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$.在这个假设下,(16)式变成

$$F = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \tag{17}$$

例如，为了在 0.10 水平检验这个假设，首先注意到(16)式中的 F 有自由度为 $m-1, n-1$ 的 F 分布．因此在 0.10 水平使用两侧检验的话，如果

$$F_{0.05} \leqslant \frac{\hat{s}_1^2}{\hat{s}_2^2} \leqslant F_{0.95} \tag{18}$$

我们应接收 H_0（至少不拒绝），否则拒绝 H_0．

可以构成单侧检验的类似步骤．这时我们希望检验假设：某一个总体方差确实比另一个要大．

估计理论和假设检验之间的关系

从上面的叙述人们能够不提到但可注意到涉及置信区间的估计理论与假设检验理论之间的关系．例如，可注意到在 0.05 水平拒绝零假设 H_0 的结果(2)式，等价于第六章的结果(1)式，引导出 95% 的置信区间

$$\bar{x} - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{x} + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \tag{19}$$

因此从双侧检验的情形看，我们确实将第六章置信区间用于检验假设．类似地，单侧检验将要求单侧置信区间（参看习题 6.14）．

操作特性曲线，检验的效力

我们已经看到，适当选择显著性水平可以限制第一类错误．当我们总是不接收假设时，会避免冒第二类错误的风险，然而人们都不是简单地采用这种做法，许多实际情况也不允许这样做．这时经常使用操作特性曲线或称 OC 曲线，它是显示在不同假设下第二类错误概率的一个图．这个图指示如何较好地给出一个检验，它极小化第二类错误．也就是指示在避免做出错误决策方面，一个检验的效力．这个图在设计试验中，如指明所需样本容量等方面是有用的．

质量控制图

在实际工作中为了了解一个过程是否已经充分改变，而必须进行补救，控制图经常是重要的．例如，在质量控制中有这样的问题：在一个制造过程中，人们必须经常而快速地确定一个观测到的变化，是由简单的机会波动引起的，还是由于机器零件的偏移或雇员的失误而造成的确实改变．控制图为这类问题提供了一个有用而简单的处理方法（参看习题 7.29）．

对样本频率分布拟合理论分布

当一个人按概率统计的理由或其他的理由有一些总体分布的认识时，他经常可以对从总体中取出的样本的观测频数分布拟合某些理论分布（也称为“模型”或“期望”分布）．一般使用这一方法时，会用样本的均值和标准差去估计总体的均值和标准差（参看习题 7.30，7.32 和 7.33）．

检验理论分布对样本分布的拟合优度问题，基本上与决定总体和样本值之间是否有显著差异是一样的．对理论分布的拟合优度的一个重要的显著性检验是卡方检验，其叙述见下一段．

在企图确定一个正态分布是否是一组给定数据的一个好的拟合时，使用正态曲线图纸或正态概率图纸是方便的（参看习题 7.31）．

拟合优度的卡方检验

从一个二项总体中抽取容量 n 的一个样本，为了确定其中的“成功”概率 P 是否与总体的

“成功”概率 p 显著不同,我们可以使用本章(5)和(6)式的统计量.在这种简单的情况,仅有两个可能的事件 A_1, A_2,我们称之为“成功”和“失败”,其概率分别为 p 和 $q=1-p$.一个随机变量的特殊样本值 $X=nP$ 常称为事件 A_1 的观测频数, np 称为期望频数.

例 7.1 如果观测一枚均匀硬币投掷 100 次,对此样本 $n=100$, $p=\frac{1}{2}$,正面(成功)的期望频数为 $np=(100)\left(\frac{1}{2}\right)=50$.当然样本中的观测频数可以不同.

对此情况的一个自然推广是:可能出现的事件有 k 个 $A_1, A_2, \cdots, A_k$,其概率分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_k$.这种情形为多项总体(参见第四章).如果从这样的总体中抽取容量为 n 的一个样本,事件 $A_1, \cdots, A_k$ 的观测频数可以用随机变量 $X_1, \cdots, X_k$ 描述(其特殊的值 $x_1, \cdots, x_k$ 是某一样本的观测频数),而它们的期望频数分别是 $np_1, \cdots, np_k$.这个结果可列成表 7-2.

表 7-2

事　件	A_1	A_2	…	A_k
观测频数	x_1	x_2	…	x_k
期望频数	np_1	np_2	…	np_k

例 7.2 如果观测一个投掷一枚均匀骰子 120 次的样本, $n=120$.出现 1,2,…,6 的概率记为 $p_1, p_2, \cdots, p_6$,它们都等于$\frac{1}{6}$.对应的期望频数为 $np_1, np_2, \cdots, np_6$,都等于 $120\times\frac{1}{6}=20$.当然样本中各个点出现的观测频数是不同的.

本章(6)式统计量的一种推广思路是,它应能度量出表 7-2 中观测与期望频数间存在的不一致,将(6)式统计量平方则得到

$$Z^2=\frac{(X-np)^2}{npq}=\frac{(X_1-np)^2}{np}+\frac{(X_2-nq)^2}{nq} \tag{20}$$

其中 $X_1=X$ 是相应于“成功”的一个随机变量, $X_2=n-X_1$ 是相应于“失败”的一个随机变量.注意(20)式中的 nq 是失败的期望频数.

对一般情形,(20)式的结果的形式建议了观测与期望频数间不一致的一种度量,提供了统计量

$$\chi^2=\frac{(X_1-np_1)^2}{np_1}+\frac{(X_2-np_2)^2}{np_2}+\cdots+\frac{(X_k-np_k)^2}{np_k}=\sum_{j=1}^{k}\frac{(X_j-np_j)^2}{np_j} \tag{21}$$

这里总频数为 n(即样本容量),所以

$$X_1+X_2+\cdots+X_k=n \tag{22}$$

可将(21)式展开等价为

$$\chi^2=\sum_{j=1}^{k}\frac{X_j^2}{np_j}-n \tag{23}$$

如果 $\chi^2=0$,则观测与期望频数精确地一致,如果 $\chi^2>0$,两者不是精确地一致. χ^2 的较大值反映了观测与期望频数间较大的不一致.

在习题 7.62 中将显示,如果期望频数 np_j 至少等于 5,(21)式定义的 χ^2 的抽样分布非常接近地近似于卡方分布(这是(21)式选用这一符号的原因).如果频数值更大则近似会更改进.这个卡方分布的自由度可如下确定:

(a) $\nu=k-1$,如果无需用样本统计量估计总体参数,可直接计算期望频数.注意从 k 中减去 1 是因为有制约(22)式,该式表明,如果我们知道了 $k-1$ 个期望频数,剩下的一个可立即被确定.

(b)$\nu = k - 1 - m$，如果需从样本统计量估计量 m 个总体参数，才能计算期望频数.

实际上，所计算的期望频数是假设 H_0 的基础，在这个假设下由(21)式或(23)式计算的 χ^2 值大于某个临界值时(比如显著性水平分别为 0.05 和 0.01 时，临界值是 $\chi^2_{0.95}$和 $\chi^2_{0.99}$)，我们应得出结论：观测频数显著地不同于期望频数. 则在对应的显著水平下应拒绝 H_0. 否则应接收 H_0，至少不拒绝 H_0. 这一过程称为卡方假设检验或卡方显著性检验.

除去应用于多项分布外，卡方检验也能用于确定其他的理论分布是否很好地拟合了从样本数据中获得的经验分布. 这些理论分布包括正态、泊松，等等. 参看习题 7.44.

列联表

在上面的表 7-2 中，观测频数占据了单个一行，被称为一种方式分类表. 由于列的个数是 k. 这也称为 $1 \times k$ 表. 扩充这个概念，我们可以得到两种方式分类表或 $h \times k$ 表，在这样的表中，观测频数占据了 h 行和 k 列. 这种表常称为列联表.

与 $h \times k$ 列联表中的每一个观测频数相对应，有一个期望的或理论的频数. 它们是遵从某些假设根据概率规则计算出来的. 占据一个列联表的某一单元小格的那些频数称为单元小格频数. 每一行或每一列的总和频数称为边缘频数.

为了研究观测或期望频数之间的一致性，我们计算统计量

$$\chi^2 = \sum_j \frac{(X_j - np_j)^2}{np_j} \tag{24}$$

这里求和号是对列联表的全部单元小格求和. X_j 和 np_j 分别表示第 j 个单元小格的观测频数和期望频数. 这个类似于(21)式的和共包含 hk 项. 全部观测频数的总和记为 n，它与全部期望频数的总和相等(可由(22)式计算).

和上面类似，当期望频数不是太小时，(24)式统计量具有的抽样分布非常接近一个卡方分布. 当 $h>1, k>1$ 时，这个分布的自由度如下确定：

(a)$\nu = (h-1)(k-1)$，如果无需用样本统计量估计总体参数，直接可计算出期望频数. 证明可参看习题 7.48.

(b)$\nu = (h-1)(k-1) - m$，如果需从样本统计量估计 m 个总体参数，再计算出期望频数.

对 $h \times k$ 表的显著性检验与 $1 \times k$ 表的检验类似，遵从一个特定的假设 H_0 去发现期望频数. 一个最常检验的假设是两种分类是相互独立的.

列联表可推广到高维表，例如可以有三分类的 $h \times k \times l$ 表.

对连续性的耶茨(Yates)修正

当连续分布的结果用于离散数据时，如我们在前几章看到的，常进行一些连续性的修正. 当使用卡方分布时也有一个修正可以利用，这个修正是将(21)式改写成

$$\chi^2(\text{修正}) = \frac{(|X_1 - np_1| - 0.5)^2}{np_1} + \frac{(|X_2 - np_2| - 0.5)^2}{np_2} + \cdots + \frac{(|X_k - np_k| - 0.5)^2}{np_k} \tag{25}$$

常称之为耶茨修正. (24)式也可类似地进行修正.

一般仅当自由度 $\nu = 1$ 时进行修正. 对大样本，这个修正实际上会产生与不修正的 χ^2 相同的结果，但是很相近的临界值会引起一些麻烦(参看习题 7.41). 对那些每个期望频数在 5 和 10 之间的小样本，计算修正的和不修正的 χ^2 值两者，可能是最好的. 如果考虑一个假设两个值招致相同的结论，比如在 0.05 水平拒绝假设，则没有麻烦. 如果两者招致不同的结论，人们常要增加样本量，而当这样做不实际时，往往会采用涉及多项分布的一些精确的概率方法.

列联系数

在列联表中度量分类间的关系、联系或相依程度往往用

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} \tag{26}$$

称之为列联系数. C 值越大,联系程度越大、在列联表中行和列的数目决定了 C 可能的最大值,这个最大值当然不会大于 1. 对 $k \times k$ 表 C 的最大值是 $\sqrt{(k-1)/k}$. 参看习题 7.52 和 7.53.

习题解答

利用正态分布作均值和比例的检验

7.1 投掷一枚均匀硬币 100 次,求出现正面在 40 至 60 次之间的概率.

解 根据二项分布,所求概率为

$$ {}_{100}C_{40}\left(\frac{1}{2}\right)^{40}\left(\frac{1}{2}\right)^{60} + {}_{100}C_{41}\left(\frac{1}{2}\right)^{41}\left(\frac{1}{2}\right)^{59} + \cdots + {}_{100}C_{60}\left(\frac{1}{2}\right)^{60}\left(\frac{1}{2}\right)^{40}$$

100 次投掷中正面出现数的均值和标准差为

$$\mu = np = 100 \times \frac{1}{2} = 50, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 5$$

由于 np 和 nq 两者均大于 5,可利用二项分布的正态近似来估算上面的和.

涉及连续的尺度,40 至 60 次间的正面数与 39.5 至 60.5 间的正面数是相同的.

$$39.5 \text{在标准单位中} = \frac{39.5 - 50}{5} = -2.10$$

$$60.5 \text{在标准单位中} = \frac{60.5 - 50}{5} = 2.10$$

$$\begin{aligned}\text{所求概率} &= \text{正态曲线下 } z = -2.10 \text{ 至 } z = 2.10 \text{ 间面积} \\ &= 2(z = 0 \text{ 至 } z = 2.10 \text{ 间面积}) = 2 \times 0.4821 = 0.9642\end{aligned}$$

7.2 检验一个假设:一枚硬币是均匀的.采用下列决策规则:(1)如果在投掷 100 次的一个样本中,出现正面数在 40 至 60 之间,则接收假设,(2)否则拒绝假设.

(a)求当假设正确时,拒绝假设的概率.

(b)用图形解释决策规则和(a)中的结果.

(c)如果在 100 次投掷中产生 53 次正面.你得出什么结论? 产生 60 次呢?

(d)在(c)中你的结论会犯错误吗? 作出解释.

解 (a)由习题 7.1,如果硬币是均匀的,出现正面的次数不在 40 至 60 之间的概率等于 1 - 0.9642 = 0.0358. 所以当假设正确而拒绝假设的概率等于 0.0358.

(b)可用图 7-2 说明决策规则.它显示了一枚均匀硬币 100 次投掷中,出现正面数的概率分布

如果 100 次投掷的一个样本产生的 z 值在 -2.10 至 2.10 之间,接收假设,否则拒绝假设,即决定该硬币是不均匀的.

当假设应该被接收而拒绝假设的错误是此决策规则的第一类错误.由(a)可知犯这种错误的概率等于 0.0358,在图中为整个阴影区域面积.

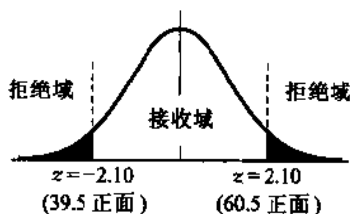


图 7-2

如果 100 次投掷的一个样本产生的正面数的 z 值落在阴影区域,我们可以说该 z 值与假设为真时所能期望的值显著不同.由于这一原因.整个阴影区域面积(即第一类错误的概率)称为该决策规则的显著性水平.在这里等于 0.0358.因此,我们在 0.0358 或 3.58% 的显著性水平下拒绝该假设.

(c)根据决策规则,在两种情形均应接收硬币是均匀的假设.人们可能会争论说:若再多发现一个正面,我们就会拒绝假设.这就是在做决策时使用截然分界线所必须面对的问题.

(d)会犯错误.当假设实际上应被拒绝时,我们可能接收了该假设.例如,真实情况可能是出现正面的概率是 0.7 而不是 0.5.

假设应该被拒绝而接收了假设所犯的错误是该决策的第二类错误.进一步的讨论参看习题7.23～7.25.

7.3 检验一枚硬币是均匀的假设.如果一个样本是64次投掷,在下列显著性水平下设计出决策规则,(a)0.05,(b)0.01.

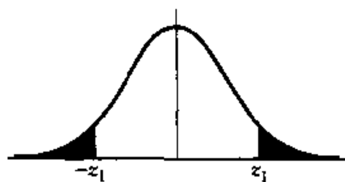


图 7-3

解 ☞ (a)**方法1** 如果显著性水平是0.05,按对称性,图7-3中每一侧的阴影面积是0.025,那么在0和 z_1 之间的面积是 $0.5000-0.0250=0.4750$,因此 $z_1=1.96$.

从而一个可能的决策规则是:

(1)如果 Z 在 -1.96 至 1.96 之间,接收假设认为硬币是均匀的.

(2)否则拒绝假设.

从表7-1也可读出临界值 -1.96 和 1.96.

按64次投掷中正面出现的次数展现这个规则.注意当硬币是均匀的假设成立时,正面数的精确的二项分布的均值和标准差为

$$\mu = np = 64 \times 0.5 = 32, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{64 \times 0.5 \times 0.5} = 4.$$

而

$$Z = (X - \mu)/\sigma = (X - 32)/4.$$

如果 $Z=1.96$,$(X-32)/4=1.96$,$X=39.84$,如果 $Z=-1.96$,$(X-32)/4=-1.96$,$X=24.16$.因此,决策规则变成:

(1)如果正面数在24.16和39.84之间,也就是在25和39之间,接收假设.

(2)否则拒绝假设.

方法2 根据概率0.95,正面数应在 $\mu-1.96\sigma$ 和 $\mu+1.96\sigma$ 之间,也就是 $np-1.96\sqrt{npq}$ 和 $np+1.96\sqrt{npq}$ 或 $32-1.96\times4=24.16$ 和 $32+1.96\times4=39.84$ 之间,就可得到上面的决策规则.

方法3 $-1.96<Z<1.96$ 等价于 $-1.96<(X-32)/4<1.96$.继而有 $-1.96\times4<(X-32)<1.96\times4$ 或 $32-1.96\times4<X<32+1.96\times4$,即 $24.16<X<39.84$.这也得到上面的决策规则.

(b)如果显著水平是0.01,图7-3每一侧阴影区域面积是0.005.那么0至 z_1 间的面积为 $0.5000-0.0050=0.4950$,则 $z_1=2.58$(更精确一点为2.575).这也可从表7-1看出.

以下用(a)中的方法2.根据概率0.99,正面数应在 $\mu-2.58\sigma$ 和 $\mu+2.58\sigma$,也就是 $32-2.58\times4=21.68$和 $32+2.58\times4=42.32$ 之间.

因此决策规则变成:

(1)正面数在22和42之间,接收假设.

(2)否则拒绝假设.

7.4 在习题7.3中,如果为了避免第二类错误,你怎样设计决策规则.

解 ☞ 当假设应被拒绝而接收了它时会犯第二类错误.为了避免这种错误,我们可以简单地用不拒绝该假设来代替接收假设,这时我们抑制了某一种决策,例如,我们将习题7.3(b)的决策规则说成:

(1)如果出现的正面数在22和42之间,则不拒绝假设.

(2)否则拒绝假设.

然而在许多实际要求中,决定一个假设是应该接收还是应该拒绝是重要的.这种时候一个完整的决策要求考虑到第二类错误(参看习题7.23～7.25).

7.5 在一项关于特殊感觉功能(ESP)的实验中,在一间屋子中的一个被实验者被要求回答一张牌的颜色(红色或蓝色).而牌是另一间屋子中一个人从一堆洗好的50张牌中一张一张地取出的.被实验者不知道这堆牌中有多少张红的,多少张蓝的.如果被实验者正确地指出了32张,确定这一结果是否是显著的,(a)在0.05水平,(b)在0.01水平,(c)求检验的 P 值并作解释.

解 ☞ 如果被实验者正确地说出一张牌的颜色的概率是 p,那么我们必须判断下面两个假设:

H_0:$p=0.5$,纯粹是猜,即选择是随机的.

H_1:$p>0.5$,被实验者有特殊功能.

我们选用单侧检验，因为我们的兴趣不在获得低分值的能力，而在获得高分值的能力.

如果假设 H_0 是真的，正确地识别的牌的张数的均值和标准差为

$$\mu = np = 50 \times 0.5 = 25, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \times 0.5 \times 0.5} = \sqrt{12.5} = 3.54$$

(a)对 0.05 显著水平的单侧检验，必须在图 7-4 中选取 z_1，使阴影部分拒绝域的面积为 0.05. 那么 0 至 z_1 的面积是 0.4500，而 $z_1 = 1.645$. 从表 7-1 也能读出这个数.

因此，决策规则或显著检验是：

(1)如果观测到的 z 值大于 1.645，则在 0.05 水平结果是显著的，该人有特殊功能.

(2)如果观测到的 z 值小于 1.645，则结果是随机的，在 0.05水平不显著.

图 7-4

因为 32 在标准单位中为(32－25)/3.54＝1.98，它大于 1.645，为(1)的判断，即结论是在 0.05 水平该人有特殊功能.

当运用连续性修正时，由于 32 在连续尺度中处于 31.5 和 32.5 之间，而 31.5 的标准化值为(31.5－25)/3.54＝1.84，从而得到同样的结论.

(b)如果显著性水平是 0.01，那么在 0 和 z_1 间的面积是 0.4900，$z_1 = 2.33$，由于 32(或 31.5)在标准单位中是 1.98(或 1.84)，小于 2.33，我们的结论是：在 0.01 水平，结果是不显著的.

一些统计学家采用了下列术语：结果在 0.01 水平显著时，称为高度显著的；当结果在 0.05 水平显著而在 0.01 水平不显著时，称为可能显著的；当结果在大于 0.05 的水平显著时，称为不显著的.

根据这些术语，我们的结论应该是，上述实验的结果是可能显著的，所以对该现象作进一步的研究可能是必要的.

(c)P 值是一个概率，它是在随机选择中正确指明 32 张或更多张牌的颜色的概率. 32 的标准化值(考虑到连续性修正)是 $z = 1.84$. 因此 P 值是 $P(Z \geqslant 1.84) = 0.032$. 统计学家可以在这个实验的基础上说该人有特殊功能，这一结论犯错误的可能性大约在 100 次中有 3 次.

7.6 一种专利药物的制造者宣称该药物在 8 小时内减轻变态反应有 90% 的效力. 今以 200 个有变态反应的人作样本，该药对 160 人有缓解. (a)用 0.01 作为显著水平，确定制造者的主张是否合理，(b)求检验的 P 值?

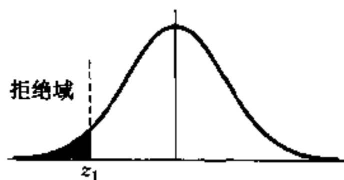


图 7-5

解 (a)以 p 记使用该药变态反应获得缓解的概率. 那么我们必在下列两个假设中做出判断：

$H_0: p = 0.9$，该主张是正确的.

$H_1: p < 0.9$，该主张是错误的.

选用单侧检验，因为我们兴趣在于用此药的人的缓解比例是否太低.

如果显著性水平取0.01，即图 7-5 中阴影区域面积为 0.01，$z_1 = -2.33$. 此值利用曲线的对称性，可从问题 7.5(b)看到，也可从表 7-1 得到.

我们采取的决策规则是：

(1)如果 Z 小于 －2.33，则该主张不合理(此时拒绝 H_0).

(2)否则认为该主张合理，观测结果是仅受随机影响(此时接受 H_0).

如果 H_0 为真，$\mu = np = 200 \times 0.9 = 180$，$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \times 0.9 \times 0.1} = 4.23$.

现在 160 在标准单位中是(160－180)/4.23＝－4.73，这比 －2.33 小得多. 因此按我们的决策规则，结论是该主张不合理. 样本的结果是高度显著的(参看习题 7.5).

(b)检验的 P 值是 $P(Z \leqslant -4.73) \approx 0$，这说明该主张几乎肯定是错的. 也就是如果 H_0 为真，几乎可以肯定使用该药物的 200 个变态反应者的样本，发现缓解的人应多于 160.

7.7 某公司生产的荧光灯泡 100 只的平均寿命测算为 1570 小时，标准差为 120 小时. 如果 μ 是该公司生产的全部灯泡的平均寿命. 试检验 $\mu = 1600$ 小时，备择假设为 $\mu \neq 1600$ 小时，使用显著性水平(a)0.05，(b)0.01，并(c)求检验的 P 值?

解 我们必须在下列两假设中作出判决：

$$H_0: \mu = 1600 \text{ 小时}, \quad H_1: \mu \neq 1600 \text{ 小时}$$

因为 $\mu \neq 1600$ 包含了大于和小于 1600 两侧的值，应使用两侧检验.

(a)在 0.05 显著水平下，作双侧检验，决策规则如下：

(1)如果样本均值的 z 值在 -1.96 至 1.96 之外，则拒绝 H_0.

(2)否则接收 H_0(或暂不做任何决策).

这个考虑下的统计量是样本均值 $\overline{X}$, $\overline{X}$ 的抽样分布有均值 $\mu_{\overline{X}} = \mu$，标准差 $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$，这里 μ 和 σ 是该公司生产的全部灯泡总体的均值和标准差.

在假设 H_0 下，有 $\mu = 1600$ 和 $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n} = 120/\sqrt{100} = 12$，这里使用样本标准差作为 σ 的估计. 由于 $Z = (\overline{X} - 1600)/12 = (1570 - 1600)/12 = -2.50$，落在 -1.96 至 1.96 区域之外，故在 0.05 显著性水平下拒绝 H_0.

(b)如果显著性水平取 0.01，则(a)中决策规则中的 -1.96 至 1.96 将替换为 -2.58 至 2.58. 那么由于 z 的值为 -2.50，在此区间内，故在 0.01 显著水平下接收 H_0(或暂不做决策).

(c)双侧检验的 P 值为 $P(z \leqslant -2.50) + P(z \geqslant 2.50) = 0.0124$. 这是 H_0 为真时样本均值小于 1570 或大于 1630 小时的概率.

7.8 在习题 7.7 中，检验假设 $\mu = 1600$，而备择假设用 $\mu < 1600$ 小时，使用显著性水平(a) 0.05，(b)0.01，并(c)求检验的 P 值?

解 我们在下列两假设中作判决：

$$H_0: \mu = 1600 \text{ 小时}, \quad H_1: \mu < 1600 \text{ 小时}$$

这儿应使用单侧检验(参看图 7-5).

(a)如果显著性水平为 0.05，图 7-5 中阴影区域有面积 0.05，则 $z_1 = -1.645$. 因此采用的决策规则是：

(1)如果 Z 小于 -1.645，拒绝 H_0.

(2)否则接收 H_0(或暂不做决策).

由于在习题 7.7(a)中看到的 z 值是 -2.50，比 -1.645 小，故在 0.05 显著性水平下拒绝 H_0. 注意这一决策与习题 7.7(a)中用双侧检验得到的决策是一样的.

(b)如果显著性水平取 0.01，图 7-5 中的 z_1 值为 -2.33，因此决策规则为

(1)如果 Z 小于 -2.33，拒绝 H_0.

(2)否则接收 H_0(或暂不做决策).

和习题 7.7(a)一样算出 z 值是 -2.50，比 -2.33 小，故在 0.01 显著性水平下拒绝 H_0. 这个决策与习题 7.7(b)中用双侧检验做出的决策不同.

可以看到与一个确定假设 H_0 相联系的单侧检验和双侧检验并非总是一致的. 由于在各种情形检验 H_0 相对的备择假设不同，这样的结果当然是可以预料的.

(c)检验的 P 值为 $P(Z < 1570) = 0.0062$，它是 H_0 为真时样本平均寿命小于 1570 小时的概率.

7.9 某生产者制造的缆绳的断裂强度均值为 1800 磅，标准差为 100 磅. 今在制造过程中使用了新技术，认为断裂强度可以增加，为了检验这一主张，用 50 根缆绳的样本作试验. 发现平均断裂强度是 1850 磅. (a)在 0.01 显著性水平下，我们能否支持这一主张，(b)求检验的 P 值?

解 (a)必须在下列两假设中作出判决：

$H_0: \mu = 1800$ 磅，断裂强度实际上未改变.

$H_1: \mu > 1800$ 磅，断裂强度有变化.

这里应使用单侧检验(参看图 7-4). 在 0.01 显著性水平下决策规则为

(1)如果观测到的 Z 值大于 2.33，则在显著水平 0.01 下结果是显著的，拒绝 H_0.

(2)否则接收 H_0(或暂不决策).

假设 H_0 为真时，我们发现

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1850 - 1800}{100/\sqrt{50}} = 3.55$$

此值大于 2.33，因此认为结果是高度显著的，从而应支持该生产者的主张.

(b)检验的 P 值为 $P(Z \geqslant 3.55) = 0.0002$，它是 H_0 为真时，样本平均断裂强度等于或大于 1850 磅的概

率.

涉及均值或比例的差的检验

7.10 两个班分别有 40 和 50 个学生，进行一场测验. 第一个班平均分为 74，标准差为 8；第二个班平均分为 78，标准差为 7. 在下列显著性水平下两个班的成绩是否有显著差异，(a)0.05，(b)0.01，并(c)求检验的 P 值？

解 设两个班是来自两个总体，分别有均值 μ_1 和 μ_2. 那么我们必须在下列假设间进行决策

$H_0: \mu_1=\mu_2$，差异纯粹是随机引起的.

$H_1: \mu_1\neq\mu_2$，两个班存在显著差异.

在 H_0 下，两个班来自同一总体. 两样本均值之差的期望值和标准差为

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=0,\quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{8^2}{40}+\frac{7^2}{50}}=1.606$$

这里用样本的标准差估计了 σ_1 和 σ_2. 那么

$$Z=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}=\frac{74-78}{1.606}=-2.49$$

(a)当 Z 在 -1.96 和 1.96 区间外时，对两侧检验，在 0.05 显著性水平下结果是显著的. 因此，我们认为在 0.05 水平下两个班成绩的差异是显著的. 第二个班可能较好.

(b)对两侧检验，如果 Z 在 -2.58 至 2.58 区间之外，在 0.01 水平结果是显著的. 因此我们认为在 0.01 水平两个班间的差异不显著.

因为结果在 0.05 水平显著而在 0.01 水平不显著，按照在习题 7.5 中使用的术语. 我们认为结果可能显著.

(c)两侧检验的 P 值为 $P(Z\leqslant -2.49)+P(Z\geqslant 2.49)=0.0128$，它是同一总体中观测统计量可能出现的概率.

7.11 50 个很愿意参加学院运动会的男学生平均身高为 68.2 英寸，标准差为 2.5 英寸，同时 50 个不愿参加的男学生的平均身高为 67.5 英寸，标准差为 2.8 英寸. (a)检验假设：参加学院运动会者身高高于其他男生. (b)求检验的 P 值？

解 (a)我们必须对两个假设作出决策：

$H_0: \mu_1=\mu_2$，身高间不存在差异.

$H_1: \mu_1>\mu_2$，第一群的身高比第二群高.

在假设 H_0 下

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=0,\quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{2.5^2}{50}+\frac{2.8^2}{50}}=0.53$$

这里使用样本标准差估计 σ_1 和 σ_2. 那么

$$Z=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}=\frac{68.2-67.5}{0.53}=1.32$$

在单侧检验下，在 0.05 显著性水平，如果 z 值大于 1.645，我们应拒绝假设 H_0. 因此在这个水平下我们不能拒绝 H_0.

然而，如果我们愿意采用犯错误概率是 0.10 的风险，也就是 10 次中有 1 次可能，在 0.10 水平下应拒绝该假设.

(b)检验的 P 值为 $P(Z\geqslant 1.32)=0.0934$，它是在 H_0 为真时，观测到的男运动员和其他男生平均身高间的正差值可能出现的概率.

7.12 在习题 7.11 中，为了使两者的平均身高差的观测值 0.7 英寸在下列水平下是显著的，两群的样本量应是多少？(a)显著性水平 0.05，(b)0.01.

解 假设每一群的样本量为 n. 两群的标准差保持一样，那么在 H_0 下，有 $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=0$.

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}}=\sqrt{\frac{(2.5)^2+(2.8)^2}{n}}=\sqrt{\frac{14.09}{n}}=\frac{3.75}{\sqrt{n}}$$

对观测到的平均身高差 0.7 英寸，有

$$Z=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}}=\frac{0.7}{3.75/\sqrt{n}}=\frac{0.7\sqrt{n}}{3.75}$$

(a)要使观测到的差异显著，在 0.05 水平下需要

$$\frac{0.7\sqrt{n}}{3.75}\geqslant 1.645 \quad 或 \quad \sqrt{n}\geqslant 8.8 \quad 或 \quad n\geqslant 78$$

因此我们必须将每群的样本量至少增加 78 - 50 = 28.

(b)在 0.01 水平要使观测到的差异显著，需

$$\frac{0.7\sqrt{n}}{3.75}\geqslant 2.33 \quad 或 \quad \sqrt{n}\geqslant 12.5 \quad 或 \quad n\geqslant 157$$

因此我们必须将每群的样本量至少增加 157 - 50 = 107.

7.13 A 和 B 两群，每群有 100 个病人. 给 A 群某一种药，而不给 B 群(称为控制组)，其他处理两群完全一样. 今发现 A 群和 B 群分别有 75 人和 65 人痊愈. 使用下列水平，检验假设：该药对治疗这种病有效. (a)0.01，(b)0.05，(c)0.10，并(d)求检验的 P 值?

解 ☞ 设 p_1 和 p_2 分别是(1)使用药物和(2)不使用药物两群中的痊愈比例. 我们必在下列两假设间决策：

$H_0: p_1=p_2$，观测到的差异是随机的，即药物无效.

$H_1: p_1>p_2$，药物有效.

在假设 H_0 下，

$$\mu_{P_1-P_2}=0, \quad \sigma_{P_1-P_2}=\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}=\sqrt{0.70\times 0.30\times\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\right)}=0.0648$$

这里我们使用两个样本群的平均痊愈比例 $(75+65)/200=0.70$ 作为 p 的一个估计，$q=1-p=0.30$，那么

$$Z=\frac{P_1-P_2}{\sigma_{P_1-P_2}}=\frac{0.750-0.650}{0.0648}=1.54$$

(a)基于单侧检验，在 0.01 显著性水平下，仅当 z 值大于 2.33 时，才拒绝 H_0. 由于 z 值仅为 1.54，我们认为在这个显著性水平下，结果是随机因素引起的.

(b)基于单侧检验，在 0.05 显著性水平下，仅当 z 值大于 1.645 时，才拒绝 H_0. 因此，我们认为在这个显著性水平下，结果也是由随机引起的.

(c)如果使用单侧检验水平为 0.10，则当 z 值大于 1.28 时拒绝 H_0. 现这一条件被满足. 故我们认为在这一 0.10 显著性水平下，药物是有效的.

(d)检验的 P 值为 $P(Z\geqslant 1.54)=0.0618$，它是 H_0 为真时，z 为 1.54 或更有利于使用者群的概率.

注意，上面的各个结论依赖于我们愿冒多大的错误风险. 如果结果确实是随机引起的，而我们认为是药物引起的(第一类错误). 我们很可能将此药用于大量的人们，而后来才发现药物确实是无效的. 这是我们一般不愿假定的风险.

另一方面，当药物确实有帮助时，我们认为它没有帮助(第二类错误). 这样的结论是非常危险的，特别是在人类生命方面打赌.

7.14 如果在习题 7.13 中，每群有 300 人，而 A 群有 225 人痊愈，B 群有 195 人痊愈. 解该问题.

解 ☞ 这时两群中痊愈人数的比例分别为 $225/300=0.750$，$195/300=0.650$，和习题 7.13 中的一样. 在 H_0 下，

$$\mu_{P_1-P_2}=0, \quad \sigma_{P_1-P_2}=\sqrt{pq\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)}=\sqrt{0.70\times 0.30\times\left(\frac{1}{300}+\frac{1}{300}\right)}=0.0374$$

这里用 $(225+195)/600=0.70$ 作为 p 的估计，那么

$$Z=\frac{P_1-P_2}{\sigma_{P_1-P_2}}=\frac{0.750-0.650}{0.0374}=2.67$$

由于 z 值大于 2.33，我们能在 0.01 显著性水平不拒绝假设，也就是仅有 0.01 的犯错误概率下，我们认为药物有效. 这时的 P 值为 $P(Z\geqslant 2.67)=0.0038$.

这说明增加样本量可以增加决策的可靠性.然而,在许多情况增加样本量可能是不实际的.这时我们应集中精力以可利用的信息去做决策,必须努力和不正确决策的巨大风险抗争.

7.15 从选区 A 取 300 张选票,从选区 B 取 200 张选票作样本,发现分别有 56% 和 48% 投选某一候选人.在显著性水平 0.05 下,检验假设:(a)选区间存在差异,(b)选区 A 更喜欢该候选人,(c)求检验的 P 值?

解 设 p_1 和 p_2 分别是选区 A 和 B 全部选票中投选该候选人的比例.

在假设 $H_0: p_1 = p_2$ 下,有

$$\mu_{P_1-P_2} = 0,$$

$$\sigma_{P_1-P_2} = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{0.528 \times 0.472 \times \left(\frac{1}{300}+\frac{1}{200}\right)} = 0.0456$$

这里用值$[(0.56)(300)+(0.48)(200)]/500 = 0.528$ 和 $1-0.528 = 0.472$ 作为 p 和 q 的估计,那么

$$Z = \frac{P_1 - P_2}{\sigma_{P_1-P_2}} = \frac{0.560 - 0.480}{0.0456} = 1.75$$

(a)如果我们仅是希望确定选区间是否存在差异,我们必须在 $H_0: p_1 = p_2$ 和 $H_1: p_1 \neq p_2$ 间作出决策,这是双侧检验.

基于双侧检验,在 0.05 显著性水平下,当 Z 处于 -1.96 至 1.96 区间以外时,应拒绝 H_0.现在 $Z = 1.75$,在区间内,在这一水平我们不应拒绝 H_0,即选区间无显著差异.

(b)如果我们希望确定是否选区 A 更喜欢该候选人,我们必须在 $H_0: p_1 = p_2$ 和 $H_1: p_1 > p_2$ 间作决策,这是单侧检验.

基于单侧检验,在 0.05 显著性水平下,当 Z 大于 1.645 时,应拒绝 H_0.故这时我们应拒绝 H_0.即在这一水平下,认为选区 A 更喜欢该候选人.

(c)在检验(a),P 值为 $P(Z \leqslant -1.75) + P(Z \geqslant 1.75) = 0.0802$;而在检验(b),$P$ 值为 $P(Z \geqslant 1.75) = 0.0401$.

涉及 t 分布的检验

7.16 一个机器已生产的垫圈平均厚度应为 0.050 英寸.为了确定该机器工作是否正常,从中取 10 个垫圈作样本,其平均厚度为 0.053 英寸,标准差为 0.003 英寸,在下列显著性水平下,检验假设:机器工作正常.(a)0.05,(b)0.01,并(c)求检验的 P 值?

解 我们希望判定的假设为

$H_0: \mu = 0.050$,机器工作正常.

$H_1: \mu \neq 0.050$,机器工作不正常.

所以用双侧检验.

在假设 H_0 下,有 $T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n-1} = \dfrac{0.053-0.050}{0.003}\sqrt{10-1} = 3.00$.

(a)在 0.05 显著性水平下作双侧检验,采用的决策规则为

(1)如果 T 在 $-t_{0.975}$和 $t_{0.975}$区间内,对自由度 $10-1=9$,该区间为 -2.26 至 2.26,接收 H_0.

(2)否则拒绝 H_0.

因为 $T = 3.00$,故在 0.05 水平下拒绝 H_0.

(b)在 0.01 显著性水平下作双侧检验,采用的决策规则为

(1)T 在 $-t_{0.995}$和 $t_{0.995}$区间内,对自由度 $10-1=9$ 该区间为 -3.25 至 3.25,接收 H_0.

(2)否则拒绝 H_0.

因为 $T = 3.00$,故在 0.01 水平接收 H_0.

由于在 0.05 水平是拒绝 H_0.在 0.01 水平未拒绝,故我们说样本的结果是可能显著的(看习题 7.5 的术语),因此,可建议检查机器或者至少再取些样本.

(c)P 值为 $P(T \geqslant 3) + P(T \leqslant -3)$,从附表 D 可以看出 $0.01 < P < 0.02$.使用软件计算可求得 $P = 0.015$.

7.17 检查一个公司生产的六根绳索,其平均断裂强度为 7750 磅,标准差为 145 磅,同时,制

造商声称该产品平均断裂强度为 8000 磅. 在下列水平下能否支持该制造商的主张. (a) 0.05, (b) 0.01, 并 (c) 求检验的 P 值?

解 ☞ 我们必须判定下列假设:

$H_0: \mu = 8000$ 磅, 制造商主张是合理的.

$H_1: \mu < 8000$ 磅, 制造商的主张不合理.

故用单侧检验; 在 H_0 下, 有

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n-1} = \frac{7750-8000}{145}\sqrt{6-1} = -3.86$$

(a) 在 0.05 显著性水平下作单侧检验, 决策规则为

(1) 如果 T 大于 $-t_{0.95}$, 自由度为 $6-1=5$ 时为 $T > -2.01$, 接收 H_0.

(2) 否则拒绝 H_0.

由于 $T = -3.86$, 故拒绝 H_0.

(b) 在 0.01 显著性水平下作单侧检验, 决策规则为

(1) 如果 T 大于 $-t_{0.99}$, 自由度为 $6-1=5$ 时为 $T > -3.36$, 接收 H_0.

(2) 否则拒绝 H_0.

由于 $T = -3.86$, 故拒绝 H_0.

我们认为极不可能制造商的主张是合理的.

(c) P 值为 $P(T \leqslant -3.86)$, 从附表 D 可以看出 $0.005 < P < 0.01$. 用软件可算出 $P = 0.006$.

7.18 某城市一个地区的 16 个学生的智商(IQ)的平均值为 107, 标准差为 10. 而该城另一地区的 14 个学生的智商的平均值为 112, 标准差为 8. 在下列显著性水平下检验两群人的智商间是否存在显著差异. (a) 0.01, (b) 0.05, 并 (c) 求检验的 P 值?

解 ☞ 用 μ_1 和 μ_2 记两个地区学生的总体平均智商. 我们必须判定下列假设:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$, 两群间基本不存在差异.

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$, 两群间存在显著差异.

在 H_0 下, 有

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sigma\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}, \quad \text{其中} \quad \sigma = \sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

那么

$$\sigma = \sqrt{\frac{16 \times 10^2 + 14 \times 8^2}{16 + 14 - 2}} = 9.44 \quad \text{和} \quad T = \frac{112 - 107}{9.44\sqrt{1/16 + 1/14}} \approx 1.45$$

(a) 在 0.01 显著性水平下做双侧检验, 如果 T 在 $-t_{0.995}$ 到 $t_{0.995}$ 区域之外, 拒绝 H_0. 对自由度 $n_1 + n_2 - 2 = 16 + 14 - 2 = 28$. 这个区域为 -2.76 到 2.76.

因此在 0.01 显著性水平我们不能拒绝 H_0.

(b) 在 0.05 显著性水平做双侧检验, 如果 T 在区域 $-t_{0.975}$ 至 $t_{0.975}$ 之外, 拒绝 H_0, 对自由度 28 这个区域为 -2.05 至 2.05.

因此在 0.05 显著性水平下不能拒绝 H_0. 我们认为两群人的智商间不存在显著差异.

(c) P 值为 $P(T \geqslant 1.45) + P(T \leqslant -1.45)$. 从附表 D 可看出 $0.1 < P < 0.2$, 用软件可算出 $P = 0.158$.

7.19 一个农业站想要检验一种肥料对小麦生产的效用. 因此选取了 24 个等面积的地块, 其中的一半施用该肥料, 而另一半不施用(控制组), 其他条件均相同. 未施用的地块的小麦平均产量为 4.8 蒲式耳, 标准差为 0.40 蒲式耳, 同时施肥地块的平均产量为 5.1 蒲式耳, 标准差为 0.36 蒲式耳, 在下列显著水平下, 我们能够认为由于施肥可显著改善小麦产量吗? (a) 1%, (b) 5%, 并 (c) 求检验的 P 值?

解 ☞ 设 μ_1 和 μ_2 是施肥和不施肥地块小麦产量的总体平均值. 我们必须判定下列假设:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$, 差异是因随机产生的.

$H_1: \mu_1 > \mu_2$, 肥料改善了产量.

在 H_0 下, 有

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sigma\sqrt{1/n_1 - 1/n_2}}, \quad \text{其中} \quad \sigma = \sqrt{\frac{n_1S_1^2 + n_2S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

那么

$$\sigma = \sqrt{\frac{12 \times 0.40^2 + 12 \times 0.36^2}{12 + 12 - 2}} - 0.397 \quad \text{和} \quad T = \frac{5.1 - 4.8}{0.397 \times \sqrt{1/12 + 1/12}} = 1.85$$

(a)在 0.01 显著性水平下做单侧检验，当 T 大于 $t_{0.99}$ 时，拒绝 H_0. 对自由度 $n_1 + n_2 - 2 = 12 + 12 - 2 = 22$ 时，$t_{0.99} = 2.51$.

因此在 0.01 显著性水平，不能拒绝 H_0.

(b)在 0.05 显著性水平下做单侧检验，当 T 大于 $t_{0.95}$ 时，拒绝 H_0. 对自由度 22，$t_{0.95} = 1.72$.

因此在 0.05 显著性水平我们能拒绝 H_0.

我们认为施肥改善小麦产量是可能显著的. 然而在做出肥料是有用的这种肯定结论之前，还应再做进一步的验证.

(c)P 值为 $P(T \geqslant 1.85)$. 从附表 D 可看出 $0.025 < P < 0.05$，用软件可算出 $P = 0.039$.

涉及卡方分布的检验

7.20 在一台机器装一种重量为 40.0 盎司的口袋，已知其标准差为 0.25 盎司，现在 20 袋的一个随机样本，显示其样本标准差为 0.32 盎司. 在下列水平下，不稳定性是否有显著增加. (a)0.05，(b)0.01，并(c)求检验的 P 值?

解 ☞ 我们必须判定假设：

$H_0: \sigma = 0.25$ 盎司，观测结果是随机引起的.

$H_1: \sigma > 0.25$ 盎司，不稳定性增加了.

样本的 χ^2 值是 $\chi^2 = ns^2/\sigma^2 = 20 \times 0.32^2/0.25^2 = 32.8$.

(a)使用单侧检验，如果样本的 χ^2 值大于 $\chi^2_{0.95}$，我们在 0.05 水平下拒绝 H_0. 对自由度 $\nu = 20 - 1 = 19$，此值为 30.1. 因此在 0.05 显著性水平下我们应拒绝 H_0.

(b)使用单侧检验，如果样本的 χ^2 值大于 $\chi^2_{0.99}$，我们在 0.01 水平下拒绝 H_0. 对自由度 19，此值等于 36.2，因此在 0.01 显著性水平下不拒绝 H_0.

我们认为不稳定性可能有所增加 应对机器作核查.

(c)P 值为 $P(\chi^2 \geqslant 32.8)$. 从附表 E 可以看出 $0.025 < P < 0.05$，用软件计算出 $P = 0.0253$.

涉及 F 分布的检验

7.21 一个教员教一门课程，有 A，B 两个班. A 班有 16 个学生，B 班有 25 个学生. 在一场测验中，虽然 A，B 两班的平均成绩没有显著差异，但 A 班的标准差为 9，而 B 班的标准差为 12. 在下列水平下能否认为 B 班的离散程度比 A 班大? (a)0.01，(b)0.05，并(c)求检验的 P 值?

解 ☞ (a)对 A 班和 B 班分别使用下标 1 和 2. 有 $s_1 = 9$，$s_2 = 12$，因此

$$\hat{s}_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1}s_1^2 = \frac{16}{15} \times 9^2 = 86.4$$

$$\hat{s}_2^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1}s_2^2 = \frac{25}{24} \times 12^2 = 150$$

我们必须判定下列假设：

$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$，观测的离散差异是随机的.

$H_1: \sigma_2 > \sigma_1$，B 班的离散比 A 班大.

因此决策应基于单侧 F 分布检验，对样本有

$$F = \frac{\hat{s}_2^2}{\hat{s}_1^2} = \frac{150}{86.4} = 1.74$$

自由度中分子是 $\nu_2 = 25 - 1 = 24$，分母是 $\nu_1 = 16 - 1 = 15$. 对自由度 24，15，在 0.01 水平，从附表 F 可查得 $F_{0.99} = 3.29$. 因此，由于 $F < F_{0.99}$，故在 0.01 水平不能拒绝 H_0.

(b)对自由度 24,15,由于 $F_{0.95}=2.29$(参看附表 F),可以看到 $F<F_{0.95}$,故在 0.05 水平仍不能拒绝 H_0.

(c)检验的 P 值为 $P(F\geqslant 1.74)$,从附表 F 可以看出 $P>0.05$,用软件可算出 $P=0.134$.

7.22 如果实际情况是班之间的平均成绩存在差异,你是否会改变习题 7.21 中的结论?解释你的回答.

解 ☞ 不会.因为在习题 7.21 中完全没有使用平均成绩,尽管他们间没有差异.事实上我们并未企图决定平均成绩间是否存在差异,而仅决策成绩的离散间是否存在差异.这个结论是可期望的.

操作特性曲线

7.23 参看习题 7.2,当真实情况是出现正面的概率为 0.7 时,接收硬币是均匀的这一假设的概率是多少?

解 ☞ 假设 H_0 为硬币是均匀的,即 $p=0.5$,当投掷 100 次中出现正面数在 39.5 至 60.5 之间时,接收这一假设.当假设应该被接收而拒绝 H_0 的概率(即第一类错误概率)是图 7-6 中左边曲线下阴影区域的总面积 α.如习题 7.2(a)中计算的,表示检验 H_0 显著性水平的这个 α 是 0.0358.

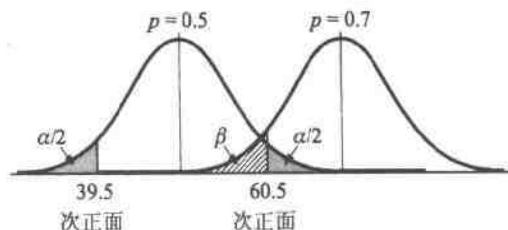


图 7-6

如果出现正面的概率是 0.7,用正态曲线表示的 100 次投掷中正面数的分布如图 7-6 的右边曲线.当真实情况为 $p=0.7$ 而接收 H_0 的概率(即第二类错误的概率)是画斜线的区域面积 β.今计算这块面积,在假设 $p=0.7$ 下,该分布有下列均值和标准差:

$$\mu = np = 100\times 0.7 = 70,\quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100\times 0.7\times 0.3} = 4.58$$

$$60.5\text{ 在标准单位中} = \frac{60.5-70}{4.58} = -2.07$$

$$39.5\text{ 在标准单位中} = \frac{39.5-70}{4.58} = -6.66$$

那么,β 为标准正态曲线下 $z=-6.66$ 至 $z=-2.07$ 之间的面积,等于 0.0192.

因此,对给定的决策当真实情况为 $p=0.7$ 时,接收硬币为均匀的假设的机会是很小的.

注意在这样的问题中,我们给定了决策规则,从它可计算 α 和 β.在实际工作中有两种可能情况:

(1)确定 α(比如 0.05 或 0.01),制定决策规则,然后计算 β.

(2)确定 α 和 β,然后再制定决策规则.

7.24 如果(a)$p=0.6$,(b)$p=0.8$,(c)$p=0.9$,(d)$p=0.4$.解习题 7.23.

解 ☞ (a)如果 $p=0.6$,正面数的分布的均值和标准差为

$$\mu = np = 100\times 0.6 = 60,\quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100\times 0.6\times 0.4} = 4.90$$

$$60.5\text{ 在标准单位中} = \frac{60.5-60}{4.90} = 0.102$$

$$39.5\text{ 在标准单位中} = \frac{39.5-60}{4.90} = -4.18$$

那么,β 为标准正态曲线下 $z=-4.18$ 至 $z=0.102$ 间的面积,等于 0.5405.

因此,给定的决策规则,在真实情况为 $p=0.6$ 时,接收硬币为均匀的假设的机会是相当大的.

(b)当 $p=0.8$,那么

$$\mu = np = 100\times 0.8 = 80,\quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100\times 0.08\times 0.2} = 4.$$

$$60.5\ 在标准单位中 = \frac{60.5-80}{4} = -4.88$$

$$39.5\ 在标准单位中 = \frac{39.5-80}{4} = -10.12$$

那么，β 为标准正态曲线下 $z=-10.12$ 至 $z=-4.88$ 间的面积，非常接近 0.

(c)与(b)进行比较或做具体计算，均可看到当 $p=0.9$ 时，对任何实际目的均可认为 β 是 0.

(d)由对称性可知 $p=0.4$ 与 $p=0.6$ 有相同的 β 值，即 $\beta=0.5405$.

7.25　用图来表示习题 7.23 和 7.24 的结果，(a)β 对 p，(b)$(1-\beta)$ 对 p，并解释.

解　表 7-3 给出习题 7.23 和 7.24 中得出的对应给定的 p 值的 β 值.

表 7-3

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
β	0.0000	0.0000	0.0192	0.5405	0.9642	0.5405	0.0192	0.0000	0.0000

β 是真实情况不是 0.5 而是 p 时接收假设 $p=0.5$ 的概率.然而当真实情况是 $p=0.5$ 时，β 可解释为：假设应被接收时接收 $p=0.5$ 的概率.这个概率等于 $1-0.0358=0.9642$.这个值也在表中.

(a)图 7-7(a)给出了 β 对 p 的图，它称为决策规则或假设检验操作特性曲线或 OC 曲线.

从 OC 曲线的最大值点到直线 $\beta=1$ 的距离等于 $\alpha=0.0358$，即检验的显著性水平.

一般，若 OC 曲线的陡坡越陡峭，则无可躲避的拒绝假设的决策规则越好.

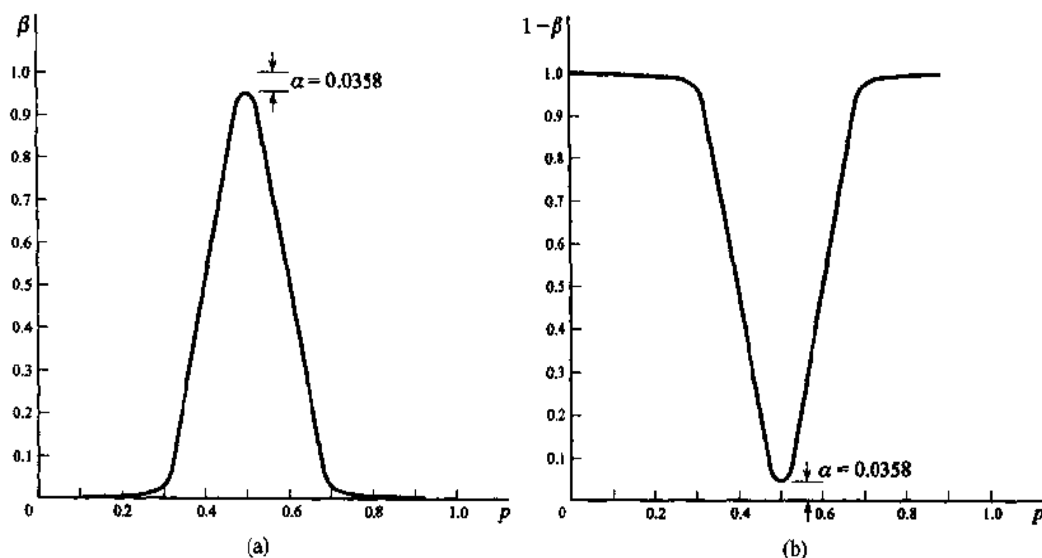


图 7-7

(b)图 7-7(b)给出了 $(1-\beta)$ 对 p 的图，它称为决策规则或假设检验的功效曲线.这个图可以简单地将 OC 曲线倒过来得到.所以这两个图实际上是等价的.

量 $1-\beta$ 常称为功效函数，因为它指示了一个检验拒绝假设即认为是假的能力或功效.β 也称为检验的操作特性函数.

7.26　一个公司制造一种绳索，其断裂强度的均值为 300 磅，标准差为 24 磅.今采用改进的新方法生产，相信可增大断裂强度的均值.(a)如果同意检查 64 根绳索，设计一个决策规则，在 0.01 的显著性水平下拒绝旧的生产方法，(b)在(a)中采用的决策规则下，当事实上新方法增大了平均断裂强度，达到 310 磅，而规则接收了旧方法的概率？假定新方法标准差仍为 24 磅.

解　(a)设 μ 是新方法平均断裂强度.我们希望判定下列假设：

H_0：$\mu=300$ 磅，新方法与旧方法一样.

$H_1:\mu>300$ 磅，新方法比旧方法好.

对显著性水平 0.01 的单侧检验，有下述决策规则(参看图 7-8)：

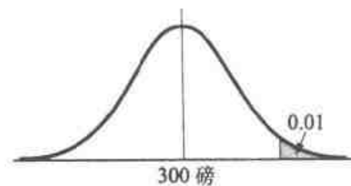


图 7-8

(1)如果样本平均断裂强度的 z 值大于 2.33，则拒绝 H_0.

(2)否则接收 H_0.

由于 $Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-300}{24/\sqrt{64}}$，$\overline{X}=300+3Z$，那么，如果 $Z>2.33$，则 $\overline{X}>300+3(2.33)=307.0$ 磅因此上面的决策规则变为

(1)如果 64 根的平均断裂强度超过 307.0 磅，则拒绝 H_0.

(2)否则接收 H_0.

(b)考虑两个假设($H_0:\mu=300$ 磅和 $H_1:\mu=310$ 磅)．这两个假设对应的断裂强度的分布分别表示为图 7-9 中左和右两个正态分布.

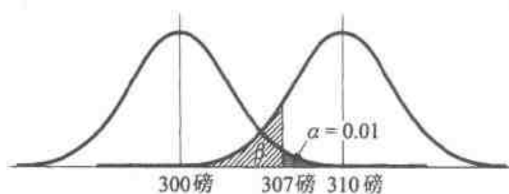


图 7-9

当新方法的平均断裂强度确实是 310 磅时，接收旧方法的概率表示为图 7-9 中区域面积 β，这可从此时 307.0 磅在标准单位中是 $(307.0-310)/3=-1.00$ 得出．因此

$$\beta=\text{右边正态曲线下 } z \text{ 为 } -1.00 \text{ 左边区域面积}=0.1587$$

这就是当 $H_1:\mu=310$ 磅确实为真时，接收 $H_0:\mu=300$ 磅的概率，即犯第二类错误的概率.

7.27 假定断裂强度的标准偏差保持为 24 磅，对习题 7.26 构造(a)OC 曲线，(b)功效曲线.

解 ☞ 与习题 7.26(b)相似的理由，对新方法生产的平均断裂强度等于 305 磅，315 磅，等等情形，找出 β 值，例如，如果 $\mu=305$ 磅，那么 307.0 磅在标准单位中为 $(307.0-305)/3=0.67$，因此，

$$\beta=\text{右边正态曲线下 } z \text{ 为 } 0.67 \text{ 的左边区域面积}=0.7486$$

按此法可得到表 7-4.

表 7-4

μ	290	295	300	305	310	315	320
β	1.0000	1.0000	0.9900	0.7486	0.1587	0.0038	0.0000

(a)图 7-10(a)给出了 OC 曲线，从这个曲线我们可以看到，如果新方法平均断裂强度小于 300 磅，保

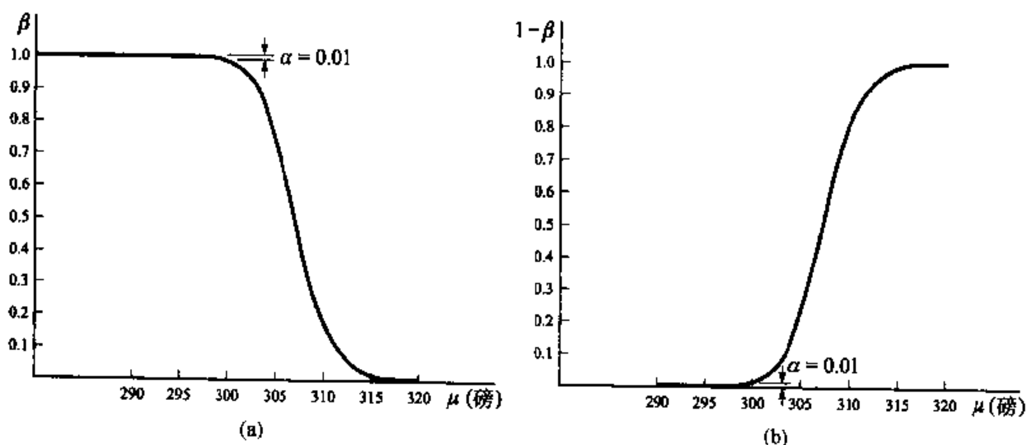


图 7-10

持用旧方法的概率实际上差不多为1(当新方法给出均值300磅时,仅差显著水平的0.01).当平均断裂强度大于315磅时,该曲线相当陡地下降到0,从而实际上没有可能保持用旧方法.

(b)图7-10(b)给出了功效曲线.可以像对OC曲线一样做出解释.实际上两个曲线基本上是等价的.

7.28 投掷硬币若干次,检验假设:硬币是均匀的(即 $p=0.5$).希望满足下列限制:(A)当假设确实正确时.拒绝它的概率至多是0.05,(B)当实际的 p 值与0.5之差多于0.1时(即 $p\geqslant 0.6$ 或 $p\leqslant 0.4$),接收假设的概率至多是0.05,确定必须的最小样本量?叙述最后的决策.

解 这里给出了第一类和第二类风险的限制.例如,满足限制(A)要求第一类错误的概率至多是 $\alpha=0.05$,同时限制(B)要求第二类错误的概率至多是 $\beta=0.05$,图7-11图形化地说明了这种状态.

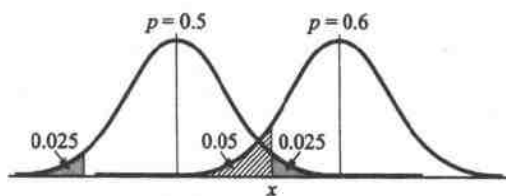


图 7-11

令 n 记所需要的样本量,x 是 n 次投掷中出现正面的次数.当次数超过 x 时将拒绝假设 $p=0.5$,从图7-11,有

(1) 当 $p=0.5$ 时,正态曲线下,$\dfrac{x-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{x-0.5n}{0.5\sqrt{n}}$右边的面积是0.025.

(2) 当 $p=0.6$ 时,正态曲线下,$\dfrac{x-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{x-0.6n}{0.49\sqrt{n}}$左边的面积是0.05.

事实上,应该是$\dfrac{(n-x)-0.6n}{0.49\sqrt{n}}$至$\dfrac{x-0.6n}{0.49\sqrt{n}}$之间的面积等于0.05,(2)中只是一个非常近的近似、注意当"最坏"的情况 $p=0.6$ 做到接收概率为0.05时,对其他在0.4和0.6以外的 p 值会自动使这一概率比0.05小 因此,表示第二类错误概率的这些概率的加权平均也会小于0.05.

从(1),$\dfrac{x-0.5n}{0.5\sqrt{n}}=1.96$,得(3)$x=0.5n+0.980\sqrt{n}$.

从(2),$\dfrac{x-0.6n}{0.49\sqrt{n}}=-1.645$,得(4)$x=0.6n-0.806\sqrt{n}$.

那么从(3)和(4),得 $n=318.98$.从而样本量至少为319,即至少投掷硬币319次.在(3)和(4)中令 $n=319$,得 $x=177$.

因此从 $p=0.5$,$x-np=177-159.5=17.5$,我们采用下述决策规则:

(a)如果319次投掷中,正面出现数在 159.5 ± 17.5 范围内,即在142和177之间,则接收假设 $p=0.5$.

(b)否则拒绝假设.

质量控制图

7.29 一台机器用于生产球轴承,调节平均直径为0.574英寸,标准差为0.008英寸.为了确定机器是否处于正常状态,每两个小时取一个6个轴承的样本,计算样本的平均直径.(a)设计一个决策规则,使人们能适当地确定是否生产的质量符合要求的标准.(b)用图表示出(a)中的决策规则.

解 (a)按99.73%的置信水平,我们能够说样本均值 $\overline{X}$ 必定在$(\mu_{\overline{X}}-3\sigma_{\overline{X}})$到$(\mu_{\overline{X}}+3\sigma_{\overline{X}})$或$(\mu-3\sigma/\sqrt{n})$到$(\mu+3\sigma/\sqrt{n})$范围内,因为 $\mu=0.574$,$\sigma=0.008$,$n=6$,样本均值在99.73%置信水平下应处于$(0.574-0.024/\sqrt{6})$到$(0.574+0.024/\sqrt{6})$或0.564到0.584英寸之间.

因此我们的决策如下:

(1)如果样本均值处于 0.564 到 0.584 区间内，则认定机器处于正常工作状态.

(2)否则认为机器不在正常工作状态，并寻找原因.

(b)样本均值的记录可以按这些均值画在一个图上，如图 7-12，此图称为质量控制图. 每一时间计算出的样本均值在图上表示为一个点. 只要点落在下限 0.564 和上限 0.584 英寸之间，生产过程就处于控制之下. 当点跑出控制限之外(例如图中星期四取的第三个样本)，则存在某些事情有错误的可能性，并应研究问题在何处.

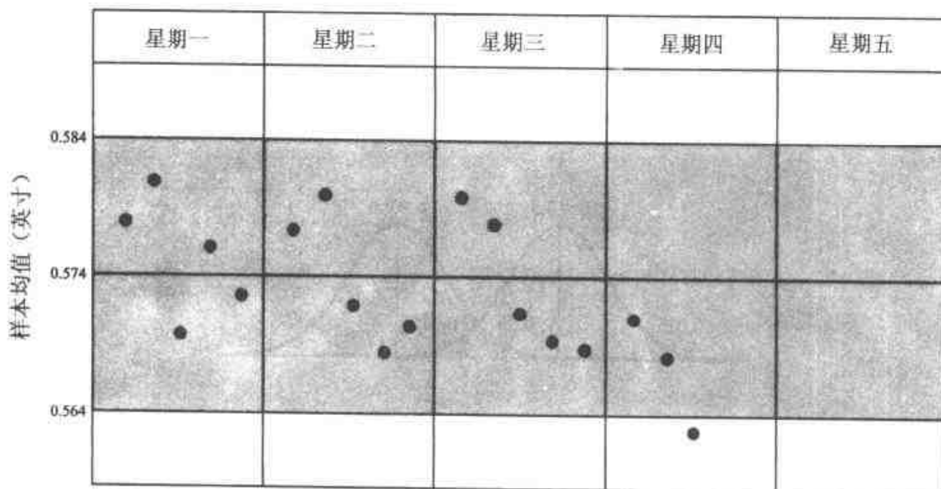


图 7-12

上面阐明的控制限称为 99.73% 置信限，或简称为 3σ 限. 当然也可确定其他置信限例如 99% 或 95% 限. 具体的选择依赖实际的环境.

用理论分布拟合资料

7.30 对第五章习题 5.30 的资料作二项分布拟合.

解 我们有 P(投掷五枚硬币中正面为 x 次) $= f(x) = {}_5C_x p^x q^{5-x}$，其中 p 和 q 表示一枚硬币的一次投掷中正面和反面出现的概率. 正面出现数的期望值为 $\mu = np = 5p$.

对实际的或观测到的频数分布，正面出现数的平均值为

$$\frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{(38)(0)+(144)(1)+(342)(2)+(287)(3)+(164)(4)+(25)(5)}{1000} = \frac{2470}{1000} = 2.47$$

使理论数与实际数相等，$5p = 2.47$ 或 $p = 0.494$. 因此拟合的二项分布给定为 $f(x) = {}_5C_x(0.494)^x(0.506)^{5-x}$.

在表 7-5 中列出了这些概率值，以及期望的(理论的)和实际的频数. 这个拟合看来较适宜. 拟合优度的研究参看习题 7.43.

表 7-5

正面数 x	P(x 正面数)	期望的频数	观测的频数
0	0.0332	33.2 或 33	38
1	0.1619	161.9 或 162	144
2	0.3162	316.2 或 316	342
3	0.3087	308.7 或 309	287
4	0.1507	150.7 或 151	164
5	0.0294	29.4 或 29	25

7.31 使用概率图纸确定第五章表 5-2 的频数分布是否是非常接近正态分布.

首先将给出的频数分布改写成一个累积相对频率分布,如表 7-6.然后在一个特定的概率图纸上以组上限值和累积频率画坐标点,累积相对频率是用百分数表示的,见图 7-13.全部坐标点落于一条直线上的程度确定了给定分布对正态分布拟合的接近程度.从图中可看到有一个正态分布与资料拟合得很近(参看习题 7.32).

表 7-6

高度(英寸)	累积相对频率(%)
小于 61.5	5.0
小于 64.5	23.0
小于 67.5	65.0
小于 70.5	92.0
小于 73.5	100.0

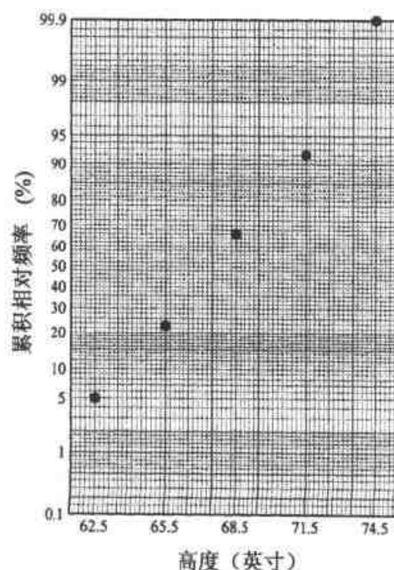


图 7-13

7.32 对第五章表 5-2 中的数据拟合一个正态分布.

解 ☞ $\bar{x}=67.45$ 英寸,$s=2.92$ 英寸

各项工作总结在表 7-7 中.对分组限计算 z 值,当均值 $\bar{x}$ 和标准差 s 由习题 5.35 和 5.40 得到时,$z=(x-\bar{x})/s$.

表 7-7

高度(英寸)	分组限 x	相对分组限的 z 值	正态曲线下从 0 到 z 的面积	每一组的面积	期望的频数	观测的频数
	59.5	−2.72	0.4967			
60～62				0.0413	4.13 或 4	5
	62.5	−1.70	0.4554			
63～65				0.2086	20.68 或 21	18
	65.5	−0.67	0.2486 } 相加			
66～68				→0.3892	38.92 或 39	42
	68.5	0.36	0.1406			
69～71				0.2771	27.71 或 28	27
	71.5	1.39	0.4177			
72～74				0.0743	7.43 或 7	8
	74.5	2.41	0.4920			

在第四列,正态曲线下从 0 到 z 的面积可使用附表 C 得到.由此列可求得第五列连续 z 值间正态曲线下的面积,当相应的 z 值是同符号时,是第四列连续两个面之差,当 z 值是异号时,是两者的和(在表中仅出现一次这种状况).从一个图形立即可清楚这一做法的原因.

用总频数 n 乘第五列(频率)的各项(此处 $n=100$)产生第六列的理论的或期望的频数,可以看到这些值与最后一列中的实际的或观测的频数是吻合得较好的.

分布的拟合优度的考虑见习题 7.44.

7.33 表 7-8 给出了 50 天期间,一个城市出现的一日中汽车事故数 x 和出现的天数 f,对该数据拟合一个泊松分布.

表 7-8

事故数 x	天数 f
0	21
1	18
2	7
3	3
4	1
总数	50

解 ☞ 事故数的均值为

$$\lambda = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{21\times 0 + 18\times 1 + 7\times 2 + 3\times 3 + 1\times 4}{50} = \frac{45}{50} = 0.90$$

那么,按泊松分布

$$P(7\text{ 次事故}) = \frac{(0.90)^x e^{-0.90}}{x!}$$

在表 7-9 中列出了事故数为 0,1,2,3 和 4 时,该泊松分布相应的概率,同时给出了发生 x 次事故的理论天数(用 50 乘相应的概率).为方便比较,第四列给出了实际的天数.

表 7-9

事故数 x	$P(x$ 次事故)	理论天数	实际天数
0	0.4066	20.33 或 20	21
1	0.3659	18.30 或 18	18
2	0.1647	8.24 或 8	7
3	0.0494	2.47 或 2	3
4	0.0111	0.56 或 1	1

可以看到这批数据的泊松分布拟合相当好.

对一个真实的泊松分布,有 $\sigma^2=\lambda$.上面给出的分布的方差算出为 0.97.将此值与作为 λ 的值 0.90相比较,可以进一步表明泊松分布近似这批数据是合适的.

卡方检验

7.34 投掷一枚硬币 200 次,观测到 115 个正面和 85 个反面.在下列显著水平下,检验假设:该硬币是均匀的,(a)0.05,(b)0.01,并(c)求检验的 P 值?

解 ☞ 正面和反面出现的频数分别为 $x_1=115$, $x_2=85$.如果硬币是均匀的,正面和反面的期望频数应分别为 $np_1=100$, $np_2=100$.故

$$\chi^2 = \frac{(x_1-np_1)^2}{np_1} + \frac{(x_2-np_2)^2}{np_2} = \frac{(115-100)^2}{100} + \frac{(85-100)^2}{100} = 4.50$$

由于分类数或组数是 $k=2$(反面,反面),$\nu=k-1=2-1=1$.

(a)一个自由度的临界值 $\chi^2_{0.95}$为 3.84.从而由 4.50>3.84,我们在 0.05 显著性水平下,拒绝假设:硬币是均匀的.

(b)一个自由度的临界值 $\chi^2_{0.99}$为 6.63,从而由 4.50<6.63,我们在 0.01 显著性水平下,不能拒绝假设:硬币是均匀的.

我们认为观测的结果是可能显著的,硬币可能不均匀.此方法和前面所用方法的比较见习题 7.36 的方法 1.

(c)P 值是 $P(\chi^2 \geqslant 4.50)$ 从附表 E 可看出 $0.025 < P < 0.05$. 用软件可算出 $P=0.039$.

7.35 对习题 7.34 使用耶茨修正.

解 ☞ $$\chi^2(\text{修正}) = \frac{(|x_1 - np_1| - 0.5)^2}{np_1} + \frac{(|x_2 - np_2| - 0.5)^2}{np_2}$$

$$= \frac{(|115-100|-0.5)^2}{100} + \frac{(|85-100|-0.5)^2}{100} = \frac{(14.5)^2}{100} + \frac{(14.5)^2}{100} = 4.205$$

修正的 P 值为 0.04.

由于 $4.205 > 3.84$ 而 $4.205 < 6.63$, 在习题 7.34 中的结论没有变化. 与前面的方法的比较参看习题 7.36 的方法 2.

7.36 利用二项分布的正态近似解习题 7.34.

解 ☞ 在硬币为均匀的假设下, 掷一枚硬币 200 次, 出现正面数的均值和标准差为

$$\mu = np = 200 \times 0.5 = 100 \text{ 和 } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \times 0.5 \times 0.5} = 7.07$$

方法 1

$$115 \text{ 在标准单位中} = (115-100)/7.07 = 2.12$$

使用 0.05 显著性水平下的两侧检验, 如果 z 值处于 -1.96 到 1.96 区间之外, 则拒绝硬币为均匀的假设. 而 0.01 水平对应的区间是 -2.58 到 2.58. 和习题 7.34 的结论一样, 我们在 0.05 水平下拒绝假设, 而在 0.01 水平下不能拒绝假设. P 值为 0.034.

注意, 上面标准化的值的平方 $(2.12)^2 = 4.50$ 与习题 7.34 中得出的 χ^2 值相同. 在有两个分组的卡方检验中总有这样的结果(参看习题 7.60).

方法 2 使用连续性修正, 多于 115 次正面等价于 114.5 以上的正面. 那么 114.5 在标准单位中为 $(114.5-100)/7.07 = 2.05$. 这导致与方法 1 相同的结论, 修正的 P 值是 0.04.

注意, 这个标准化的值的平方 $(2.05)^2 = 4.20$, 与使用耶茨连续修正的 χ^2 修正值相同. 对有两个分组使用耶茨修正的卡方检验总有这样的结果. 进一步可看习题 7.60.

7.37 表 7-10 列出了投掷一枚骰子 120 次观测的频数和期望的频数. (a)在显著性水平 0.05, 检验假设: 骰子是均匀的. (b)求检验的 P 值.

表 7-10

面上点数	1	2	3	4	5	6
观测频数	25	17	15	23	24	16
期望频数	20	20	20	20	20	20

解 ☞ (a)

$$\chi^2 = \frac{(x_1-np_1)^2}{np_1} + \frac{(x_2-np_2)^2}{np_2} + \frac{(x_3-np_3)^2}{np_3} + \frac{(x_4-np_4)^2}{np_4} + \frac{(x_5-np_5)^2}{np_5} + \frac{(x_6-np_6)^2}{np_6}$$

$$= \frac{(25-20)^2}{20} + \frac{(17-20)^2}{20} + \frac{(15-20)^2}{20} + \frac{(23-20)^2}{20} + \frac{(24-20)^2}{20} + \frac{(16-20)^2}{20} = 5.00$$

由于分类数或组数是 $k=6$(面子点数 1, 2, 3, 4, 5, 6), $\nu = k-1 = 6-1 = 5$. 5 个自由度的临界值 $\chi^2_{0.95}$ 是 11.1, 那么由 $5.00 < 11.1$, 我们不能拒绝该骰子是均匀的假设.

对 5 个自由度, $\chi^2_{0.05} = 1.15$, 则 $\chi^2 = 5.00 > 1.15$. 从这一不等可得到这样的见解: 该骰子不是非常杰出地均匀. 我们带一点点疑问去审查它.

(b)检验的 P 值是 $P(\chi^2 \geqslant 5.00)$, 从附表 E 可看出 $0.25 < P < 0.5$, 用软件可算出 $P=0.42$.

7.38 在一个 250 个数字的随机数表中, 数字 0, 1, …, 9 的分布如表 7-11. (a)是否观测分布与期望的分布显著不同? (b)P 值是多少?

解 ☞ (a) $$\chi^2 = \frac{(17-25)^2}{25} + \frac{(31-25)^2}{25} + \frac{(29-25)^2}{25} + \frac{(18-25)^2}{25} + \cdots + \frac{(36-25)^2}{25} = 23.3$$

表 7-11

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
观测频数	17	31	29	18	14	20	35	30	20	36
期望频数	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25

对自由度 $\nu=k-1=9$ 临界值 $\chi^2_{0.99}=21.7$，而 $23.3>21.7$，因此我们认为在 0.01 显著性水平，观测分布与期望分布显著不同.因此在那张表上有一些疑问.

(b)P 值是 $P(\chi^2\geqslant 23.3)$，从附表 E 可以看出 $0.005<P<0.01$，用软件可算得 $P=0.0056$.

7.39 在用豌豆进行的孟德尔(Mendel)实验中，观测到 315 粒饱满而且为黄色，108 粒饱满而且为绿色，101 粒干缩黄色，32 粒干缩绿色.根据他的遗传学理论，这些数的比例应为 9:3:3:1.有没有什么证据怀疑他的理论.(a)显著性水平 0.01，(b)显著性水平 0.05，并(c)求 P 值？

解 ☞ 豌豆的总数是 $315+108+101+32=556$.期望的比例是 9:3:3:1，我们可期望

$$\frac{9}{16}\times 556=312.75 \text{ 饱满黄色} \qquad \frac{3}{16}\times 556=104.25 \text{ 干缩黄色}$$

$$\frac{3}{16}\times 556=104.25 \text{ 饱满绿色} \qquad \frac{1}{16}\times 556=34.75 \text{ 干缩绿色}$$

那么

$$\chi^2=\frac{(315-312.75)^2}{312.75}+\frac{(108-104.25)^2}{104.25}+\frac{(101-104.25)^2}{104.25}+\frac{(32-34.75)^2}{34.75}=0.470$$

由于分类数 $k=4$，自由度为 $\nu=4-1=3$.

(a)在 0.01 水平，对 $\nu=3$，$\chi^2_{0.99}=11.3$，故我们不能拒绝他的理论.

(b)在 0.05 水平，对 $\nu=3$，$\chi^2_{0.95}=7.81$，故我们也不能拒绝他的理论.

我们认为该理论与实验是一致的.

注意，对自由度 3，$\chi^2_{0.05}=0.352$，而 $\chi^2=0.470>0.352$，因此，虽然一致是好的，而观测的结果还有一些可推究的抽样误差.

(c)P 值为 $P(\chi^2\geqslant 0.470)$.从附表 E 可以看出 $0.9<P<0.95$.软件计算可得 $P=0.93$.

7.40 一个罐子中有大量弹子，它们有四种不同的颜色：红，橙，黄，绿.今从罐中随机取出 12 个作样本，有 2 个红的，5 个橙的，4 个黄的，1 个绿的.检验假设：罐中各色弹子有相同的比例，并计算 P 值.

解 ☞ 在有相同的比例的假设下，12 个球各颜色的期望数是 3.

由于该期望数比 5 小，直接用卡方近似是不正确的.为了避免出现这样的问题，可组合这些分类，使每一类的期望数至少为 5.

如果我们希望拒绝假设.组合各类时应有明显证据反对该假设.在我们的情形，将分类组合为"红或绿"和"橙或黄"是最好的，这样该样本两类中分别有 3 个和 9 个弹子.这时在假设下每类的期望数为 6.故

$$\chi^2=\frac{(3-6)^2}{6}+\frac{(9-6)^2}{6}=3$$

对 $\nu=2-1=1$，$\chi^2_{0.95}=3.84$.因此，在 0.05 显著性水平，我们不能拒绝假设(在 0.10 水平，能拒绝假设)，但可以理解为在各色球有相同比例时观测结果仍可能是随机引起的.P 值为 $P(\chi^2\geqslant 3)=0.083$.

另解 使用耶茨修正，我们有

$$\chi^2=\frac{(|3-6|-0.5)^2}{6}+\frac{(|9-6|-0.5)^2}{6}=\frac{2.5^2}{6}+\frac{2.5^2}{6}=2.1$$

这将引导出与上面相同的结论.由于耶茨修正总是使 χ^2 值减小，这个结论是自然的，这时 P 值为 $P(\chi^2\geqslant 2.1)=0.15$.

如果尽管频数太小仍直接使用卡方近似，则

$$\chi^2 = \frac{(2-3)^2}{3} + \frac{(5-3)^2}{3} + \frac{(4-3)^2}{3} + \frac{(1-3)^2}{3} = 3.33$$

而 P 值为0.34.

由于 $\nu=4-1=3$, $\chi^2_{0.95}=7.81$,我们会得到上面一样的结论.但不幸的是由于频数太小,用卡方近似是无说服力的.因此当组合类别的方法不能利用时,必须依靠涉及多元分布的一些精确的概率方法.

7.41 掷一对骰子360次,观测到74次七点和24次十一点.使用0.05显著性水平,检验假设:骰子是均匀的,并求出 P 值?

解 ☞ 一对骰子可出现36种状态,七点在其中有6种,而十一点在其中有2种.那么,P(出七点) $=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, P(出十一点) $=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.因此,360次投掷中,出现七点的期望数为 $\frac{1}{6}(360)=60$,出现十一点的期望数为 $\frac{1}{18}(360)=20$,故

$$\chi^2 = \frac{(74-60)^2}{60} + \frac{(24-20)^2}{20} = 4.07$$

相应 P 值为0.044.

由于 $\nu=2-1=1$, $\chi^2_{0.95}=3.84$.那么因 $4.07>3.84$,应拒绝骰子是均匀的假设.然而使用耶茨修正,我们有

$$\chi^2(\text{修正}) = \frac{(|74-60|-0.5)^2}{60} + \frac{(|24-20|-0.5)^2}{20} = \frac{(13.5)^2}{60} + \frac{(3.5)^2}{20} = 3.65$$

相应的 P 值为0.056.

因此,基于修正的 χ^2,我们不能在0.05显著性水平下拒绝假设.

一般,像这里那样的大样本,使用耶茨修正证明比不修正的结果更可靠.然而,当修正的 χ^2 很接近临界值时,依靠这一个还是另一个做出决策,我们仍会迟疑不决.这时,特别是在0.05水平下,取更多的观测增加样本量可能是最好的办法,否则我们可以在其他的水平(比如0.10)拒绝假设①

7.42 调查了320个有5个孩子的家庭,男孩数和女孩数的分布见表7-12.(a)这个结果与生男生女概率相等的假设是否吻合,(b)样本结果确定的 P 值是多少?

解 ☞ (a)

表7-12

男、女孩数	5男 0女	4男 1女	3男 2女	2男 3女	1男 4女	0男 5女	总数
家庭数	18	56	110	88	40	8	320

设 p 是生男的概率, $q=1-p$ 是生女的概率.那么(5男),(4男1女),…,(5女)事件的概率是二项展开中相应的项

$$(p+q)^5 = p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5$$

当 $p=q=\frac{1}{2}$,有

$P(5男\quad 0女)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$,　　$P(2男\quad 3女)=10\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{10}{32}$

$P(4男\quad 1女)=5\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{32}$,　　$P(1男\quad 4女)=5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{32}$

$P(3男\quad 2女)=10\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32}$,　　$P(0男\quad 5女)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

那么一家庭中有5,4,3,2,1和0个男孩的期望家庭数分别为用320乘上列各概率,为10,50,

① 该题似乎应采用三个分组的卡方检验,即"七点","十一点"和"其他点".——译者注

100,100,50,10.因此

$$\chi^2 = \frac{(80-10)^2}{10} + \frac{(56-50)^2}{50} + \frac{(100-100)^2}{100} + \frac{(88-100)^2}{100} + \frac{(40-50)^2}{50} + \frac{(8-10)^2}{10} = 12.0$$

由于对 $\nu = 6-1=5$ 个自由度,$\chi^2_{0.95}=11.1$,$\chi^2_{0.99}=15.1$,因此我们能在0.05水平拒绝假设,而在0.01水平不能拒绝假设.从而我们认为样本结果是可能显著的,男孩和女孩的出生可能不等.

(b)P 值为 $P(\chi^2 \geqslant 12.0)=0.035$.

拟合优度

7.43 使用卡方检验确定习题7.30中资料的拟合优度.

解 ☞

$$\chi^2 = \frac{(38-33.2)^2}{33.2} + \frac{(144-161.9)^2}{161.9} + \frac{(342-316.2)^2}{316.2} + \frac{(287-308.7)^2}{308.7} + \frac{(164-150.7)^2}{150.7} + \frac{(25-29.4)^2}{29.4} = 7.45$$

由于计算期望频数中使用的估计出的参数个数目 $m=1$(即二项分布的参数 p),有 $\nu = k-1-m = 6-1-1=4$.

对 $\nu=4$,$\chi^2_{0.95}=9.49$.因此资料的拟合是好的.

对 $\nu=4$,$\chi^2_{0.05}=0.711$,因此,由于 $\chi^2=7.54>0.711$,拟合并非好得令人惊异.

P 值是 $P(\chi^2 \geqslant 7.45)=0.11$.

7.44 确定习题7.32中资料的拟合优度.

解 ☞ $\chi^2 = \frac{(5-4.13)^2}{4.13} + \frac{(18-20.68)^2}{20.68} + \frac{(42-38.92)^2}{38.92} + \frac{(27-27.71)^2}{27.71} + \frac{(8-7.43)^2}{7.43} = 0.959$

由于计算期望频数中使用的估计出的参数的数目 $m=2$(正态分布的均值 μ 和标准差 σ),有 $\nu = k-1-2=5-1-2=2$.

对 $\nu=2$,$\chi^2_{0.95}=5.99$,因此我们认为资料拟合得非常好.

对 $\nu=2$,$\chi^2_{0.05}=0.103$,那么由于 $\chi^2=0.959>0.103$,该拟合也非极好.

P 值是 $P(\chi^2 \geqslant 0.959)=0.62$.

列联表

7.45 对习题7.13使用卡方检验.

解 ☞ 问题的条件均写在表7-13中.零假设 H_0 是药物无效.这时如表7-14所指明的,在每一群人中痊愈者期望数为70,而不痊愈期望数为30.H_0 的叙述等价于:痊愈与使用药物是独立的,即分类是独立的.

表7-13 观测的频数

	痊愈	未痊愈	总数
群 A (使用药物)	75	25	100
群 B (未使用药物)	65	35	100
总数	140	60	200

表 7-14　H_0 下的期望频数

	痊愈	未痊愈	总数
群 A（使用药物）	70	30	100
群 B（未使用药物）	70	30	100
总数	140	60	200

$$\chi^2=\frac{(75-70)^2}{70}+\frac{(65-70)^2}{70}+\frac{(25-30)^2}{30}+\frac{(35-30)^2}{30}=2.38$$

为确定自由度的个数，考虑表 7-15，该表仅有总数，它们和表 7-13 及表 7-14 一样，很明显在空着的 4 个单元小格中仅有一个位置是自由的，因为给定这个数后，剩下的其他单元小格将由指明的总数惟一地确定，因此自由度是 1.

表 7-15

	痊愈	未痊愈	总数
群 A			100
群 B			100
总数	140	60	200

对自由度 1，$\chi^2_{0.95}=3.84$，由于 $\chi^2=2.38<3.84$，我们认为在 0.05 显著性水平结果不显著. 因此在这个水平不能拒绝 H_0. 我们认为药物无效，或者暂不决策等待进一步试验. 观测频率对应的 P 值为 $P(\chi^2\geqslant 2.38)=0.12$.

注意，$\chi^2=2.38$ 是习题 7.13 中获得的 z 值，$z=1.54$ 的平方. 一般在 2×2 的列联表中样本比例的卡方检验. 与前面使用正态近似的比例之差的显著性检验是等价的.

同时也应注意此处的 P 值 0.12 是习题 7.13 中 P 值 0.618 的 2 倍. 一般一个单侧的 χ^2 检验等价于使用 χ 的两侧检验. 例如，$\chi^2>\chi^2_{0.95}$对应到 $\chi>\chi_{0.95}$或 $\chi<-\chi_{0.95}$. 由于 2×2 表中 χ^2 是 z 值的平方，这时 χ 与 z 是同一个数，因此，0.05 水平的用 χ^2 的拒绝域等价于用 z 的在 0.10 水平的双侧检验的拒绝域.

7.46　用耶茨修正解习题 7.45.

解 ☞
$$\chi^2(\text{修正})=\frac{(|75-70|-0.5)^2}{70}+\frac{(|65-70|-0.5)^2}{70}+\frac{(|25-30|-0.5)^2}{30}+\frac{(|35-30|-0.5)^2}{30}=1.93$$

相应的 P 值为 0.16.

因此，在习题 7.45 中的结论不变，只要注意到耶茨修正总是减少了 χ^2 值而增加了 P 值，很容易明白上述结论.

7.47　表 7-16 给出了三位教员 X,Y,Z 考试中通过的和未通过的学生数、检验假设：三位教员未通过的学生的比例相等.

表 7-16　观测频数

	X	Y	Z	总数
通过	50	47	56	153
未通过	5	14	8	27
总数	55	61	64	180

解 ☞ 在 H_0 下，三个教员未通过的学生的比例相同，未通过比例应为 27/180＝15%，通过比例为

85% .表 7-17 列出了 H_0 下的期望频数.

表 7-17 H_0 下的期望频数

	X	Y	Z	总数
通过	85% of 55 = 46.75	85% of 61 = 51.85	85% of 64 = 54.40	153
未通过	15% of 55 = 8.25	15% of 61 = 9.15	15% of 64 = 9.60	27
总数	55	61	64	180

那么

$$\chi^2 = \frac{(50-46.75)^2}{46.75} + \frac{(47-51.85)^2}{51.85} + \frac{(56-54.40)^2}{54.40} + \frac{(5-8.25)^2}{8.25} + \frac{(14-9.15)^2}{9.15} + \frac{(8-9.60)^2}{9.60} - 4.84$$

为了确定自由度,考虑表 7-18,它和表 7-16 及表 7-17 一样但仅给出了总数.显然在第一列的空单元小格中仅一个自由的位置,而后第二列和第三列各空格仅有一个是自由的.其他空格将为指明的总数惟一确定.因此,这时自由度是 2.

表 7-18

	X	Y	Z	总数
通过				153
未通过				27
总数	55	61	64	180

由于 $\chi^2_{0.95}=5.99$,故在 0.05 水平不能拒绝 H_0.然而 $\chi^2_{0.90}=4.61$,如果我们愿意采用 10 次中有一次犯错误的风险,在 0.10 水平我们应拒绝 H_0. P 值为 $P(\chi^2 \geqslant 4.84)=0.089$.

7.48 对一个 $h \times k$ 的列联表,说明自由度的个数为 $(h-1)(k-1)$.

解 ☞ hk 个单元小格存在 $h+k-1$ 个独立的总数.从而自由度的个数是要求的

$$hk-(h+k-1)=(h-1)(k-1)$$

如果在计算理论频数时需要的参数均是已知的,上述结果保持不变.否则,如本章列联表理论中(b)项所述需作适当调整.

7.49 表 7-19 列出一张 2×2 列联表,说明

$$\chi^2 = \frac{n(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{n_1n_2n_An_B}$$

表 7-19 观测结果

	Ⅰ	Ⅱ	总数
A	a_1	a_2	n_A
B	b_1	b_2	n_B
总数	n_1	n_2	n

解 ☞ 如习题 7.45 一样,在零假设下期望的结果列在表 7-20 中.

表 7-20　期望结果

	Ⅰ	Ⅱ	总数
A	n_1n_A/n	n_2n_A/n	n_A
B	n_1n_B/n	n_2n_B/n	n_B
总数	n_1	n_2	n

那么

$$\chi^2 = \frac{(a_1 - n_1n_A/n)^2}{n_1n_A/n} + \frac{(a_2 - n_2n_A/n)^2}{n_2n_A/n} + \frac{(b_1 - n_1n_B/n)^2}{n_1n_B/n} + \frac{(b_2 - n_2n_B/n)^2}{n_2n_B/n}$$

但是

$$a_1 - \frac{n_1n_A}{n} = a_1 - \frac{(a_1 + b_1)(a_1 + a_2)}{a_1 + b_1 + a_2 + b_2} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{n}$$

$$a_2 - \frac{n_2n_A}{n} = b_1 - \frac{n_1n_B}{n} = b_2 - \frac{n_2n_B}{n} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{n}$$

因此可以写成

$$\chi^2 = \frac{n}{n_1n_A}\left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{n}\right)^2 + \frac{n}{n_2n_A}\left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{n}\right)^2 + \frac{n}{n_1n_B}\left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{n}\right)^2 + \frac{n}{n_2n_B}\left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{n}\right)^2$$

可简化成

(1)
$$\chi^2 = \frac{n(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{n_1n_2n_An_B} = \frac{n\Delta^2}{n_1n_2n_An_B}$$

其中 $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$, $n = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$, $n_1 = a_1 + b_1$, $n_2 = a_2 + b_2$, $n_A = a_1 + a_2$, $n_B = b_1 + b_2$.
如果使用耶茨修正,则(1)变成

(2)
$$\chi^2(修正) = \frac{n\left(|\Delta| - \frac{1}{2}n\right)^2}{n_1n_2n_An_B}$$

7.50　对习题 7.45 中的资料,说明习题 7.49 的结果.

解　在习题 7.45 中,$a_1 = 75$, $a_2 = 25$, $b_1 = 65$, $b_2 = 35$, $n_1 = 140$, $n_2 = 60$, $n_A = 100$, $n_B = 100$, $n = 200$. 代入习题 7.49 的(1)式,则

$$\chi^2 = \frac{200(75 \times 35 - 25 \times 65)^2}{140 \times 60 \times 100 \times 100} = 2.38$$

使用耶茨修正,则得到与习题 7.46 相同的结果.

$$\chi^2(修正) = \frac{n\left(|a_1b_2 - a_2b_1| - \frac{1}{2}n\right)^2}{n_1n_2n_An_B} = \frac{200(|75 \times 35 - 25 \times 65| - 100)^2}{140 \times 60 \times 100 \times 100} = 1.93$$

7.51　说明涉及两个样本比例的卡方检验等价于使用正态近似的比例之差的显著性检验(参看本章比例之差的检验).

解　设 P_1 和 P_2 是两个样本中的比例,P 为总体的比例,参照习题 7.49,有

(1)
$$P_1 = \frac{a_1}{n_1}, \quad P_2 = \frac{a_2}{n_2}, \quad 1 - P_1 = \frac{b_1}{n_1}, \quad 1 - P_2 = \frac{b_2}{n_2}$$

(2)
$$p = \frac{n_A}{n}, \quad 1 - p = q = \frac{n_B}{n}$$

从而

(3)
$$a_1 = n_1P_1, \quad a_2 = n_2P_2, \quad b_1 = n_1(1 - P_1), \quad b_2 = n_2(1 - P_2)$$

(4)
$$n_A = np, n_B = nq$$

使用(3)和(4),由习题 7.49,有

$$\chi^2 = \frac{n(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{n_1n_2n_An_B} = \frac{n[n_1P_1n_2(1 - P_2) - n_2P_2n_1(1 - P_1)]^2}{n_1n_2npnq}$$

$$= \frac{n_1n_2(P_1 - P_2)^2}{npq} = \frac{(P_1 - P_2)^2}{pq(1/n_1 + 1/n_2)} \quad (因\ n = n_1 + n_2)$$

它是本章第(10)式中统计量 Z 的平方.

列联系数

7.52 对习题 7.45 列联表求列联系数.

解 ☞ $C=\sqrt{\dfrac{\chi^2}{\chi^2+n}}=\sqrt{\dfrac{2.38}{2.38+200}}=\sqrt{0.01176}=0.1084$

7.53 对习题 7.13 中可能的 2×2 表求 C 的最大值.

解 ☞ 当两种分类是完全相依时出现 C 的最大值.此时,服药者将全部痊愈,而不服药者将不痊愈.其列联表如表 7-21.

表 7-21

	痊愈	未痊愈	总数
群 A (使用药物)	100	0	100
群 B (未使用药物)	0	100	100
总数	100	100	200

由于假定两者完全独立时,单元小格的期望频数等于 50,故

$$\chi^2=\frac{(100-50)^2}{50}+\frac{(0-50)^2}{50}+\frac{(0-50)^2}{50}+\frac{(100-50)^2}{50}=200$$

那么 C 的最大值为 $\sqrt{\chi^2/(\chi^2+n)}=\sqrt{200/(200+200)}=0.7071$.

一般,对行数与列数均为 k 的一个完全相依的列联表中,仅在左上至右下的对角线上出现非零的单元小格频数.此时,有 $C_{\max}=\sqrt{(k-1)/k}$.

综合题

7.54 一位教师给出一个 10 道是非题的小测验.为了检验假设:一个学生完全依靠猜测,使用下列决策:(i)如果对 7 道题或更多,则该生不是猜测,(ii)如果对 7 道题以下,则该生是猜测.求当假设正确时被拒绝的概率.

解 ☞ 设 p=正确回答一道题的概率.

10 道题中有 x 道正确的概率为 ${}_{10}C_x p^x q^{10-x}$,这里 $q=1-p$.

在假设下 $p=0.5$(学生随机猜测).那么

$$P(7\text{道或更多正确})=P(7\text{道正确})-P(8\text{道正确})+P(9\text{道正确})+P(10\text{道正确})$$
$$={}_{10}C_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_{10}C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_{10}C_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)+{}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$
$$=0.1719$$

因此,当学生实际上是猜测而认为他不是猜测的概率为 0.1719.这就是第一类错误的概率.

7.55 在习题 7.54 中,当实际为 $p=0.7$ 时,求接收假设 $p=0.5$ 的概率.

解 ☞ 在假设 $p=0.7$ 下,

$$P(\text{少于}7\text{道正确})=1-P(7\text{道或更多正确})$$
$$=1-\{{}_{10}C_7(0.7)^7(0.3)^3+{}_{10}C_8(0.7)^8(0.3)^2$$
$$+{}_{10}C_9(0.7)^9(0.3)+{}_{10}C_{10}(0.7)^{10}\}=0.3504$$

7.56 在习题 7.54 中,当实际的 p 值为下列各数时,求接收假设 $p=0.5$ 的概率.(a) $p=0.6$,(b) $p=0.8$,(c) $p=0.9$,(d) $p=0.4$,(e) $p=0.3$,(f) $p=0.2$,(g) $p=0.1$.

解 ☞ (a)如果 $p=0.6$,所求概率为

$1-[P(7\text{道正确})+P(8\text{道正确})+P(9\text{道正确})+P(10\text{道正确})]$

$$=1-[{}_{10}C_7(0.6)^7(0.4)^3+{}_{10}C_8(0.6)^8(0.4)^2+{}_{10}C_9(0.6)^9(0.4)+{}_{10}C_{10}(0.6)^{10}]=0.618$$

(b),(c),…,(g)的结果可类似地求得,今列在表 7-22 中,表中亦列出习题 7.55 中 $p=0.7$ 的相应值.这个概率就是第二类错误的概率 β.表中也将 $p=0.5$ 时从习题 7.54 得到的 $\beta=1-0.1719=0.828$ 列在其中.

表 7-22

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
β	1.000	0.999	0.989	0.945	0.828	0.618	0.350	0.121	0.013

7.57 使用习题 7.56 的结果构造 β 对 p 的坐标图,这是习题 7.54 中决策规则的操作特性曲线.

解 ☞ 图 7-14 给出了所要求的图,它与习题 7.27 的 OC 曲线类似.如果要画 $(1-\beta)$ 对 p 的决策规则的功效曲线,也易获得.该图指明当实际为 $p\geqslant 0.8$ 时,给定的决策规则对拒绝 $p=0.5$ 是有力的.

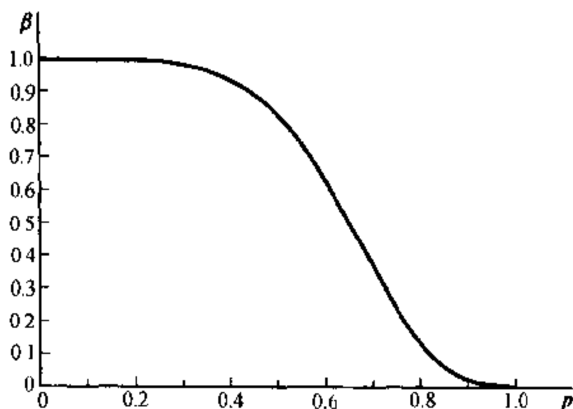


图 7-14

7.58 投掷一枚硬币 6 次,6 次皆出现正面,能否在下列水平下认为该硬币显著不均匀?

解 ☞ (a)0.05,(b)0.01.考虑单侧和双侧检验.

设 p 是一次投掷中出现正面的概率.在假设 $H_0:p=0.5$ 下(即硬币是均匀的),

$$f(x)=P(6\text{次中}\ x\ \text{次正面})={}_6C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}=\frac{{}_6C_x}{64}$$

那么出现正面为 0,1,2,3,4,5 和 6 次的概率分别是$\frac{1}{64},\frac{6}{64},\frac{15}{64},\frac{20}{64},\frac{15}{64},\frac{6}{64}$和$\frac{1}{64}$.

单侧检验 我们希望对假设 $H_0:p=0.5$ 和 $H_1:p>0.5$ 作出判断.由于 $P(6\text{次皆为正面})=\frac{1}{64}=0.01562$,和 $P(\text{出现5次或6次正面})=\frac{6}{64}+\frac{1}{64}=0.1094$,在 0.05 水平我们能拒绝 H_0,但在0.01水平不能拒绝(即观测结果在 0.05 是显著的,但在 0.01 不是).

双侧检验 我们希望对假设 $H_0:p=0.5$ 和 $H_1:p\neq 0.5$ 作出判断.由于 $P(\text{出现0次或6次正面})=\frac{1}{64}+\frac{1}{64}=0.03125$,故在 0.05 水平能拒绝 H_0,而在 0.01 水平不能拒绝.

7.59 如果在习题 7.58 中出现 5 次正面,解该问题.

解 ☞ **单侧检验** 由于

$$P(\text{出现5次或6次正面})=\frac{6}{64}+\frac{1}{64}=\frac{7}{64}=0.1094$$

故在 0.05 或 0.01 水平均不能拒绝 H_0.

双侧检验　由于

$$P(\text{出现 0 次,1 次或 5 次,6 次正面}) = 2\left(\frac{7}{64}\right) = 0.2188$$

故在 0.05 或 0.01 水平均不能拒绝 H_0.

7.60　说明仅有两个分组的卡方检验等价于本章前面对比例的显著性检验.

解　如果 P 是样本中分组 I 的比例,p 是相应总体比例,n 是总的频数,可用表 7-23 描述这种状态.那么按定义

$$\chi^2 = \frac{(nP - np)^2}{np} + \frac{[n(1-P) - n(1-p)]^2}{nq}$$

$$= \frac{n^2(P-p)^2}{np} + \frac{n^2(P-p)^2}{nq} = n(P-p)^2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{n(P-p)^2}{pq} = \frac{(P-p)^2}{pq/n}$$

这就是前面第(5)式中统计量 Z 的平方.

表 7-23

	I	II	总数
观测频数	nP	$n(1-P)$	n
期望频数	np	$n(1-p) = nq$	n

7.61　设 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 有多项分布,期望频数为 $np_1, np_2, \cdots, np_k$. 而 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$ 是相互独立的泊松分布变量,参数分别为 $\lambda_1 = np_1, \lambda_2 = np_2, \cdots, \lambda_k = np_k$,证明当给定 $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k = n$ 时,$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$的条件分布恰好是$(X_1, X_2, \cdots, X_k)$的多项分布.

证明　$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$的联合概率函数为

(1)
$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \cdots, Y_k = y_k) = \left[\frac{(np_1)^{y_1}e^{-np_1}}{y_1!}\right]\left[\frac{(np_2)^{y_2}e^{-np_2}}{y_2!}\right]\cdots\left[\frac{(np_k)^{y_k}e^{-np_k}}{y_k!}\right]$$
$$= \frac{n^{y_1+y_2+\cdots+y_k}p_1^{y_1}p_2^{y_2}\cdots p_k^{y_k}}{y_1!\,y_2!\cdots y_k!}e^{-n}$$

其中使用了 $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. 我们所求的条件分布为

(2)
$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \cdots, Y_k = y_k \mid Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k = n)$$
$$= \frac{P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \cdots, Y_k = y_k \text{和} Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k = n)}{P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k = n)}$$

现在由(1)得(2)中分子有值

$$\frac{n^n p_1^{y_1}p_2^{y_2}\cdots p_k^{y_k}}{y_1!\,y_2!\cdots y_k!}e^{-n}$$

对分母,从第四章习题 4.94 知 $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k$ 本身是一个泊松变量,参数为 $np_1 + np_2 + \cdots + np_k = n$. 因此分母有值

$$\frac{n^n e^{-n}}{n!}$$

这样(2)变成

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \cdots, Y_k = y_k \mid Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k = n) = \frac{n!}{y_1!\,y_2!\cdots y_k!}p_1^{y_1}p_2^{y_2}\cdots p_k^{y_k}$$

这正好是$(X_1, X_2, \cdots, X_k)$的多项分布(比较第四章(16)式).

7.62　使用习题 7.61 的结果,说明本章(21)式定义的统计量 χ^2 有近似卡方分布.

解　按照原状在本章(22)式限制下,多项分布变量$(X_1, X_2, \cdots, X_k)$是相依的,处理(21)式比较困难.然而,习题 7.61 告诉我们可用给定 $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k = n$ 的相互独立泊松分布变量 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$ 代替 $X_1, X_2, \cdots, X_k$. 因此,将(21)式写成

(1)
$$\chi^2 = \left(\frac{Y_1 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 + \left(\frac{Y_2 - \lambda_2}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{Y_k - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right)^2$$

当 $n \to \infty$ 时,全部的 λ 值趋向∞,由泊松分布的中心极限定理(参看第四章(14)式),有

(2) $$\chi^2 \approx Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2$$

这里 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_k$ 是相互独立正态变量，均值为 0，方差为 1，它们的分布是在下列事件下的条件分布，该事件是

(3) $$\sqrt{\lambda_1}Z_1 + \sqrt{\lambda_2}Z_2 + \cdots + \sqrt{\lambda_k}Z_k = 0 \quad 或 \quad \sqrt{p_1}Z_1 + \sqrt{p_2}Z_2 + \cdots + \sqrt{p_k}Z_k = 0$$

或者考虑到随机变量是连续的，该事件是

(4) $$|\sqrt{p_1}Z_1 + \sqrt{p_2}Z_2 + \cdots + \sqrt{p_k}Z_k| < \varepsilon$$

让我们用 $F_\nu(x)$ 记自由度为 ν 的一个卡方变量的累积分布函数. 那么我们想要证明的是对一个适当的 ν，有

(5) $$\begin{aligned} & P(Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2 \leqq x \mid |\sqrt{p_1}Z_1 + \sqrt{p_2}Z_2 + \cdots + \sqrt{p_k}Z_k| < \varepsilon) \\ &= \frac{P(Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2 \leqq x \text{ 和 } |\sqrt{p_1}Z_1 + \sqrt{p_2}Z_2 + \cdots + \sqrt{p_k}Z_k| < \varepsilon)}{P(|\sqrt{p_1}Z_1 + \sqrt{p_2}Z_2 + \cdots + \sqrt{p_k}Z_k| < \varepsilon)} \\ &= F_\nu(x) \end{aligned}$$

使用几何直观很容易得到(5)式. 首先定理 4-3 说明 $Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2$ 的无条件分布是 k 个自由度的卡方分布. 由于对每一 Z_j，密度函数为 $(2\pi)^{-1/2}e^{-z^2/2}$，故

(6) $$F_k(x) = (2\pi)^{-k/2} \int \cdots \int_{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2 \leq x} e^{-(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2)/2} dz_1 dz_2 \cdots dz_k$$

其次，(5) 式中的分子有

(7) $$分子 = (2\pi)^{-k/2} \int \cdots \int_{\substack{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2 \leq x, \\ |\sqrt{p_1}z_1 + \sqrt{p_2}z_2 + \cdots + \sqrt{p_k}z_k| < \varepsilon}} e^{-(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2)/2} dz_1 dz_2 \cdots dz_k$$

现在回忆一下解析几何. 在三维空间中，$\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 \leqslant a^2$ 代表一中心在原点，半径为 a 的球体，同时 $\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 + \alpha_3\chi_3 = 0$ 是一个通过原点的平面. 它的单位法向量是 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. 图 7-15 显示了这两个几何体的交集. 当一个函数仅依赖从原点计算的距离时，即

$$f(r), 其中\ r = \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2}$$

在这个圆面积上或者在这一面积上的整个薄板内积分时，其积分值显然与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 确定的方向余弦完全独立. 换句话说. 一切通过原点的平面给出相同的积分.

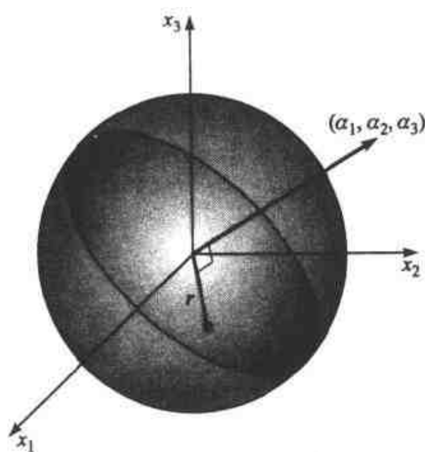


图 7-15

在(7)中使用类似的结论，这里原点为中心的超球和通过原点的超平面相交，$e^{-r^2/2}$ 在这个交集上积分，故可选用方便的 p 值. 我们选

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_{k-1} = 0, p_k = 1$$

从而使用(6)式得到

(8) $$分子 = (2\pi)^{-k/2} \int \cdots \int_{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{k-1}^2 \leq x} e^{-(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{k-1}^2)/2} dz_1 dz_2 \cdots dz_{k-1} (2\varepsilon)$$

$$= (2\pi)^{-1/2} F_{k-1}(x)(2\varepsilon)$$

因子 2ε 作为薄板的厚度.

为了计算(5)式中的分母,我们注意随机变量

$$W = \sqrt{p_1} Z_1 + \sqrt{p_2} Z_2 + \cdots + \sqrt{p_k} Z_k$$

是正态变量(因为它是正变量的线性组合),且

$$E(W) = \sqrt{p_1}(0) + \sqrt{p_2}(0) + \cdots + \sqrt{p_k}(0) = 0$$
$$\mathrm{Var}(W) = p_1(1) + p_2(1) + \cdots + p_k(1) = 1$$

因此, W 的密度函数是 $\phi(W) = (2\pi)^{-1/2} e^{-w^2/2}$,则

(9) $$\text{分母} = P(|W| < \varepsilon) = \phi(0)(2\varepsilon) = (2\pi)^{-1/2}(2\varepsilon)$$

用(9)去除(8),则得所要求的结果,其中 $\nu = k - 1$.

上面的"证明"(可以做得很严格)附带地说明每一个加在 z 值上的线性限制(也就是在 Y 值上或 X 值上的限制)将 χ^2 的自由度减少 1.这为本章前面给出的决策规则提供了基础.

补 充 习 题

利用正态分布作均值和比例的检验

7.63 一个罐中有红、蓝两种弹子.为了检验两种颜色的比例相等的假设,有放回地抽取 64 个弹子作样本,记录其颜色并采用下述决策规则:(1)当抽出的红弹子数在 28 至 36 之间时,接收假设;(2)否则拒绝假设.(a)求当假设为真时拒绝该假设的概率,(b)画图解释决策规则和(a)中获得的结果.

7.64 (a)在习题 7.63 中如果你要求当假设为真时拒绝该假设的概率至多为 0.01,即显著性水平为 0.01,你应采取什么样的决策规则?(b)在什么置信水平你会接收该假设?(c)如果显著性水平是 0.05,你应采取什么样的决策规则?

7.65 假定你希望在习题 7.63 中检验红弹子比例大于蓝弹子比例的假设.(a)你将取什么作零假设,什么是备择假设?(b)你将用单侧还是双侧检验,为什么?(c)如果显著性水平是 0.05,你采用什么决策规则?(d)如果显著性水平是 0.01,采用什么决策规则?

7.66 投掷一对骰子 100 次,七点出现 23 次.检验假设:骰子是均匀的.(a)用双侧检验,(b)用单侧检验.检验使用 0.05 显著性水平.讨论一下,你是否更喜欢某一个,为什么?

7.67 在显著性水平 0.01 下解习题 7.66.

7.68 一个制造商宣称:他供给某厂的设备至少 95% 符合规格.考查 200 台设备作样本,发现 18 台不符合规格.在下列显著性水平检验该人的主张.(a)0.01,(b)0.05.

7.69 从已往的试验中发现,某一给定品牌的线的平均抗断强度是 9.27 盎司,标准差为1.4盎司.今从 36 根线的样本中得到样本平均抗断强度为 8.93 盎司.能否在显著性水平(a)0.05 或(b)0.01 下,认为线变差了吗?

7.70 在大量的学校中对学生进行一门课程测验,平均成绩为 74.5,标准差为 8.0.在某一特定学校有 200 个学生参加该门课程测验,平均成绩是 75.9.在 0.05 水平下讨论这个结果的显著性.从(a)单侧检验的观点.(b)从双侧检验的观点.仔细解释这些检验中的结论.

7.71 在显著性水平 0.01 下回答习题 7.70.

涉及均值和比例之差的检验

7.72 A 厂生产的 100 个电灯泡样本有平均寿命 1190 小时和标准差 90 小时.B 厂生产的 75 个灯泡样本有平均寿命 1230 小时和标准差 120 小时.在显著性水平(a)0.05,(b)0.01 下,两种灯泡的平均寿命是否有显著差异?

7.73 使用显著性水平(a)0.05,(b)0.01 检验习题 7.72 中 B 厂灯泡是优于 A 厂灯泡的假设.解释本题与习题 7.72 中的提问间的差异.本题的结果与习题 7.72 的结果矛盾吗?

7.74 在一所小学进行的拼音考试中,32 个男孩的平均成绩为 72,标准差为 8,同时 36 个女孩的平均成绩为 75,标准差为 6.检验假设:女孩的拼音成绩优于男孩.使用显著性水平(a)0.05,(b)0.01.

7.75 在小麦生产中检验一种肥料的效力,一处田地被分成 60 块等面积的方块.一切分配表明土壤,光照等等都是相同的.新的肥料用在 30 块田地上,另 30 块用旧的肥料.使用新肥料的地块平均每块收麦

18.2 蒲式耳和标准差 0.63 蒲式耳，施用旧肥料的地块平均麦收为 17.8 蒲式耳和标准差 0.54 蒲式耳．检验假设：新肥料比旧肥料好，使用显著性水平(a)0.05，(b)0.01．

7.76 随机取 A 机器生产的 200 个螺钉，B 机器生产的 100 个螺钉作样本，分别发现 19 个和 5 个次品．检验假设：(a)两个机器有质量差异，(b)B 机器比 A 机器好．使用 0.05 显著性水平．

涉及学生氏 t 分布的检验

7.77 某公司已往生产的电灯泡平均寿命为 1120 小时，标准差为 125 小时．今从最近生产的一批灯泡中取出 8 只作样本，测得平均寿命为 1070 小时．检验假设：灯泡的平均寿命没有变化．使用显著性水平(a)0.05，(b)0.01．

7.78 在习题 7.77 中，检验假设 $\mu=1120$ 小时，相对的备择假设为 $\mu<1120$．使用显著性水平(a)0.05，(b)0.01．

7.79 某合金产品的生产规格要求 23.2% 的铜．10 个产品样品的分析显示平均铜含 23.5%，标准差为 0.24%．在显著性水平(a)0.05，(b)0.01 下，能认为该产品符合规格吗？

7.80 在习题 7.79 中，检验假设：平均铜含率比要求的规格高．使用显著性水平(a)0.01，(b)0.05．

7.81 一个效率专家主张在生产过程中引进一种新型机器，他能够实质性地减少生产所需的时间．由于涉及机器维护及管理等时间的增加．感到除非生产时间能减少至少 8.0%，否则他们不能引进．6 次具体试验表明生产时间减少了 8.4%，标准差为 0.32%．检验假设：应引进新的生产过程．使用显著性水平(a)0.01，(b)0.05．

7.82 对两种类型 A 和 B 的化学溶剂，测试它们的 pH 值(溶剂的酸碱度)．分析 A 的 6 个样品有平均 pH 值 7.52，标准差为 0.024．分析 B 的 5 个样品有平均 pH 值 7.49，标准差为 0.032．使用 0.05 显著性水平，确定两种溶剂的 pH 值是否有差异．

7.83 在一个班上对 12 名学生进行一项心理学测试，平均成绩是 78，标准差为 6，同时在另一个班上 15 个学生的平均成绩是 74，标准差为 8．使用 0.05 显著性水平，确定第一群是否优于第二群．

涉及卡方分布的检验

7.84 一个公司生产某种缆绳，其抗断强度的标准差为 240 磅．现引进缆绳的一种新的生产过程，抽取现生产的 8 根缆绳作样本，样本标准差为 300 磅．研究产品的离散程度是否有显著改进．使用显著性水平(a)0.05，(b)0.01．

7.85 一个城市的年度温度用每个月的第 15 天的平均温度的平均值来度量．在过去的 100 年间该城市年度温度的标准差为华氏 16°．在最近的 15 年中，年度温度的标准差为华氏 10°．检验假设：该城市的年度温度比以往变得更少变化了．使用显著性水平(a)0.05，(b)0.01．

7.86 在习题 7.77 中，20 个电灯泡的样本显示寿命的标准差为 150 小时．你认为这不平常吗？作出解释．

涉及 F 分布的检验

7.87 两个样本分别包含 21 个和 9 个观测，其方差分别为 $s_1^2=16$ 和 $s_2^2=8$．检验假设：第一个总体的方差比第二个总体的方差大．使用显著性水平(a)0.05，(b)0.01．

7.88 如果两个样本分别包含 60 个和 120 个观测，解习题 7.87．

7.89 在习题 7.82 中，我们能否认为两种溶剂的 pH 值的离散程度存在显著差异，使用显著性水平 0.10．

操作特性曲线

7.90 参看习题 7.63，当真实的红弹子的比例 p 取值为(a)0.6，(b)0.7，(c)0.8，(d)0.9，(e)0.3 时，确定接收红、蓝弹子比例相等的假设的概率？

7.91 用图画出习题 7.90 的结果，(a)β 对 p，(b)$(1-\beta)$ 对 p．像习题 7.25 那样比较这些图．可将红、蓝弹子类似考虑成正面、反面．

质量控制图

7.92 以往一生产者制造的某种线有平均断裂强度 8.64 盎司，标准差 1.28 盎司．为确定生产是否稳定，每 3 小时取 16 段线作为样本测量其平均断裂强度．作下列控制限的质量控制图：(a)99.73% 或 3σ，(b)

99%，(c)95%，并解释它们的应用.

7.93　一公司生产的螺钉大约有 3% 为次品. 为维护生产的质量，每 4 小时测量 200 个生产的螺钉作样本. 对每个样本的次品数画出(a)99%，(b)95% 的控制限. 注意此时仅需要上控制限.

用理论分布拟合资料

7.94　对表 7-24 的资料作二项分布拟合.

表 7-24

x	0	1	2	3	4
f	30	62	46	10	2

7.95　对习题 5.98 的资料作正态分布拟合.

7.96　对习题 5.100 的资料作正态分布拟合.

7.97　对习题 7.44 的资料作泊松分布拟合，并将它与使用二项分布的拟合进行比较.

7.98　从 1875 年至 1894 年 20 年间，在 10 个普鲁士军团中，每年每个军团被马踢死的人数统计如表 7-25. 对资料作泊松分布拟合.

表 7-25

x	0	1	2	3	4
f	109	65	22	3	1

卡方检验

7.99　投掷一枚硬币 60 次，出现 37 次正面和 23 次反面. 检验假设：硬币是均匀的. 使用显著性水平(a)0.05，(b)0.01.

7.100　使用耶茨修正解习题 7.99.

7.101　一群教员在一段长时间内对一门课程的给分有 12% 为 A，18% 为 B，40% 为 C，18% 为 D，12% 未通过. 现在一个新教员在两学期内对该课程给分为 22 个 A，34 个 B，66 个 C，16 个 D，12 个未通过. 在 0.05 显著性水平下，确定该新教员的给分是否与已往其他人的分数结构一致.

7.102　一次掷三枚硬币共 240 次，每次记录正面出现数. 表 7-26 给出了记录结果，并列出了硬币是均匀的假设下相应的期望结果. 在 0.05 显著性水平下检验这个假设.

表 7-26

	0 个正面	1 个正面	2 个正面	3 个正面
观测频数	24	108	95	23
期望频数	30	90	90	30

7.103　某一周从一个公共图书馆借出的书的数目见表 7-27. 检验假设：借出的书的数目与星期几无关. 使用显著性水平(a)0.05，(b)0.01.

表 7-27

	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
借出的图书数	135	108	120	114	146

7.104　一个罐子中有 6 个红弹子和 3 个白弹子，随机从罐中抽取两个，记录下颜色后放回罐中，如此进行 120 次，结果的统计见表 7-28，(a)求出期望频数，(b)在 0.05 显著性水平确定观测结果是否与期望结果一致.

表 7-28

	0 红 2 白	1 红 1 白	2 红 0 白
抽取数	6	53	61

7.105　从 4 台机器生产的螺钉中，每台随机抽取 200 个，发现次品数分别为 2，9，10，3，在0.05显著水平下，确定机器是否有显著差异.

拟合优度

7.106　(a)使用卡方检验确定习题 7.94 资料的拟合优度？(b)使用 0.05 显著性水平，确定拟合是否“非常好”？

7.107　使用卡方检验确定下列资料的拟合优度？(a)习题 7.95 的资料，(b)习题 7.96 的资料. 对每个使用 0.05 显著性水平，确定拟合是否“非常好”.

7.108　使用卡方检验确定下列资料的拟合优度？(a)习题 7.97 的资料，(b)习题 7.98 的资料. 你的(a)的结果与习题 7.106 的结果有无矛盾？

列联表

7.109　表 7-29 记录了实验室用动物作抗某种疾病预防注射效力的研究结果. 使用(a)0.01，(b)0.05 显著性水平，检验假设：预防注射与未作预防注射群之间无差异，也就是预防注射与这种疾病是独立的.

表 7-29

	得病者	未得病者
预防注射	9	42
未注射	17	28

7.110　用耶茨修正解习题 7.109.

7.111　有 A 和 B 两群学生，进行一门考试，表 7-30 列出了两群学生的通过和未通过数. 使用(a)0.05，(b) 0.01 显著性水平，检验假设：两群不存在差异. 并用耶茨修正解习题.

表 7-30

	通过	未通过
群 A	72	17
群 B	64	23

7.112　对一群抱怨没有睡好的病人，一些人给安眠药丸，其余的给糖丸(他们全都认为得到安眠药丸)，过后问他们药丸是否有帮助，这些人的反映统计在表 7-31 中. 假定全部病人所述皆是真实的，检验假设：安眠药丸与糖丸没有差异. 使用 0.05 显著性水平.

表 7-31

	睡眠良好	睡眠不好
服药丸	44	10
服糖丸	81	35

7.113　在一项有国家重要性的提案中，民主和共和阵营的投票统计在表 7-32 中，在(a)0.01，(b)0.05 显著性水平，检验假设：对这一提案的态度两党间没有差异.

表 7-32

	赞成	反对	弃权
民主	85	78	37
共和	118	61	25

7.114　表 7-33 列出了一群学生的数学和物理成绩统计. 检验假设：物理成绩与数学成绩是独立的. 使用(a)0.05，(b)0.01 显著性水平.

表 7-33

		数学		
		高分	中等	低分
物理	高分	56	71	12
	中等	47	163	38
	低分	14	42	85

7.115　为了确定驾驶者的年龄是否影响他们卷入的汽车事故数(包括全部小事故)，进行了调查，结果如表 7-34. 在(a)0.05，(b)0.01 显著性水平. 检验假设：事故数与驾驶者年龄独立. 抽样调查中的什么样的可能的异议的原因或其他考虑可能影响你的结论？

表 7-34

		驾驶者年龄				
		21～30	31～40	41～50	51～60	61～70
事故数	0	748	821	786	720	672
	1	74	60	51	66	50
	2	31	25	22	16	15
	大于 2	9	10	6	5	7

列联系数

7.116　表 7-35 列出了 200 位女士作样本的头发和眼睛颜色的关系. (a)写出不用和用耶茨修正的列联系数. (b)将(a)中的结果与最大的列联系数作比较.

表 7-35

		头发颜色	
		金发	非金发
眼睛颜色	蓝色	49	25
	非蓝色	30	96

7.117　求下列资料不用和用耶茨修正的列联系数，(a)习题 7.109 的资料，(b)习题 7.111 的资料.

7.118　求习题7.114的资料的列联系数.

综合问题

7.119　A,B两个罐子含有相同数目的弹子,但各罐中红、白弹子的比例是未知的,今分别从两个罐中各取50个弹子作样本,A的样本有32个红色,B的样本有23个红色.使用显著性水平0.05,检验假设:(a)两罐中红、白弹子比例相等,(b)A中红色的比例大于B中比例.

7.120　在习题7.54中,在下列显著性水平下,要使教员肯定一个学生不是依靠猜测,问该生至少必须正确回答多少个问题?(a)0.05,(b)0.01,(c)0.001,(d)0.06.

7.121　一枚硬币投掷8次,有7次出现正面.你能拒绝硬币是均匀的假设吗?使用双侧检验和显著性水平(a)0.05,(b)0.10,(c)0.01.

7.122　在一所大学中以往很长时间内,一门物理课程中成绩为A的百分数为10%.现在某一学期中一群300个学生中有40个A,检验该结果的显著性,使用显著性水平(a)0.05,(b)0.01.

7.123　使用A品牌的汽油,5辆相似的汽车在同样的条件下每加仑平均行驶英里数为22.6,标准差为0.48.使用B品牌平均行驶英里数为21.4,标准差为0.54,用显著性水平0.05,研究是否A品牌比B品牌每加仑可行驶更多的里程.

7.124　在习题7.123中,是否品牌B比品牌A在每加仑行驶英里数上有更大的不稳定性?进行解释.

补充习题答案

7.63　(a)0.2606.

7.64　(a)如果取出的红弹子数在22至42之间,则接收假设,否则拒绝假设.(b)0.99.(c)如果取出的红弹子数在24至40之间,则接收假设,否则拒绝假设.

7.65　(a)(H_0:$p=0.5$)(H_1:$p>0.5$),(b)单侧检验,(c)如果取出的红弹子数大于39,则拒绝假设H_0,否则接收假设H_0(或暂不决策),(d)如果取出的红弹子数大于41,则拒绝H_0,否则接收H_0(或暂不决策).

7.66　(a)在0.05水平不能拒绝假设,(b)在0.05水平能拒绝假设.

7.67　在(a)或(b)中,0.01水平时均不能拒绝假设.

7.68　使用单侧检验,在两种水平均能拒绝该主张.

7.69　是.在两种水平对每一情形使用单侧检验.

7.70　在单侧和双侧检验两种情况下,结果均是在0.05水平下显著的.

7.71　在单侧检验中,结果在0.01水平下是显著的,但在双侧检验中不是.

7.72　(a)是,(b)不是.

7.73　在两种水平的单侧检验中,均显示B品牌优于A品牌.

7.74　在0.05水平的单侧检验中,差异是显著的,但在0.01水平不显著.

7.75　在两种显著水平,单侧检验均显示新肥料比较好.

7.76　(a)在0.05水平的双侧检验显示执行的质量没有差异,(b)在0.05水平的单侧检验显示B的执行不如A好.

7.77　在两种水平下的双侧检验均不能证明平均寿命有变化.

7.78　在0.05和0.01两种水平下的单侧检验均指明平均值没有减少.

7.79　在两种水平下的双侧检验均显示产品不符合规格.

7.80　在两种水平下的单侧检验均显示铜的平均含量高于规格要求.

7.81　如果显著性水平采用0.01,单侧检验显示不应引进该过程,但是如果显著性水平采用0.05,则应引进该过程.

7.82　在显著性水平0.05使用双侧检验,不认为酸碱度间存在差异.

7.83　在0.05显著性水平下使用单侧检验,我们应认为第一群不比第二群优秀.

7.84　在两种水平下,离散程度间表现出的增长是不显著的.

7.85　在0.05水平下,表现出的减少是显著的,但是在0.01水平下,不显著.

7.86　在0.05水平下,应认为这个结果是不平常的.但在0.01水平,不应认为不平常.

7.87　在两种水平下,均不能认为第一个方差比第二个大.

7.88　在两种水平下,均能认为第一个方差比第二个大.

7.89 不存在.

7.90 (a)0.3112,(b)0.0118,(c)0,(d)0,(e)0.0118.

7.92 (a)8.64±0.96 盎司,(b)8.64±0.83 盎司,(c)8.64±0.63 盎司.

7.93 (a)6,(b)4.

7.94 $f(x)={}_4C_x(0.32)^x(0.68)^{4-x}$,期望频数分别是 32,60,43,13 和 2.

7.95 期望频数分别是 1.7,5.5,12.0,15.9,13.7,7.6,2.7,0.6.

7.96 期望频数分别是 1.1,4.0,11.1,23.9,39.5,50.2,49.0,36.6,21.1,9.4,3.1 和 1.0.

7.97 期望频数分别是 41.7,53.4,34.2,14.6 和 4.7.

7.98 $f(x)=\frac{(0.61)^x e^{-0.61}}{x!}$,期望频数分别是 108.7,66.3,20.2,4.1 和 0.7.

7.99 在两种水平下,均不能拒绝假设.

7.100 结论与前一题一样.

7.101 该新教员的给分结构与已往其他人不一致(事实上,成绩比已往的平均要好,可能是由较好的教学技能或较低的标准或者这两种因素造成的).

7.102 不存在理由拒绝假设;该硬币是均匀的.

7.103 在两种水平下,均无理由拒绝假设.

7.104 (a)分别为 10,60,50,(b)在 0.05 显著性水平下,不能拒绝假设;观测结果与期望结果一致.

7.105 在 0.05 水平下差异是显著的.

7.106 (a)拟合是好的,(b)不是"非常好".

7.107 (a)拟合是"非常好",(b)在 0.05 水平拟合是拙劣的.

7.108 (a)在 0.05 水平拟合很拙劣,因为二项分布给出了资料的一个拟合优度,这些与习题 7.106 是符合的.

(b)拟合是好的但不是"特别好".

7.109 在 0.05 水平能拒绝假设,但在 0.01 水平不能.

7.110 相同的结论.

7.111 在两种水平下均不能拒绝假设.

7.112 在 0.05 水平下不能拒绝假设.

7.113 在两种水平下,均拒绝假设.

7.114 在两种水平下,均拒绝假设.

7.115 在两种水平下,均不能拒绝假设.

7.116 (a)0.3864,0.3779(用耶茨修正).

7.117 (a)0.2205,0.1985(修正),(b)0.0872,0.0738(修正).

7.118 0.4651.

7.119 (a)在 0.05 水平的双侧检验不能拒绝假设;两罐中的比例相等.(b)在 0.05 水平的单侧检验指明 A 中红弹子的比例比 B 中的大.

7.120 (a)9,(b)10,(c)10,(d)8.

7.121 (a)不能,(b)能,(c)不能.

7.122 使用单侧检验.结果在 0.05 水平是显著的,但在 0.01 水平不显著.

7.123 在 0.05 水平下可以认为 A 品牌比 B 品牌好.

7.124 在 0.05 水平下不能认为 A 品牌比 B 品牌好.

第八章　曲线拟合、回归和相关

曲线拟合

实践中经常要寻求两个(或多个)变量间存在的关系,人们希望用确定变量间的一个方程式来表达这种数学关系.

第一步是收集资料,显示变量的对应值.例如,设用 x 和 y 分别表示一个成年男子的身高和重量,那么 n 个样本单元应显示身高 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和对应的重量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$.

第二步是在直角坐标系中画出点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$. 这个点集图有时称为散点图.

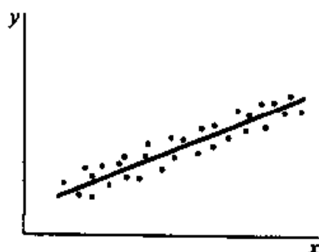


图 8-1

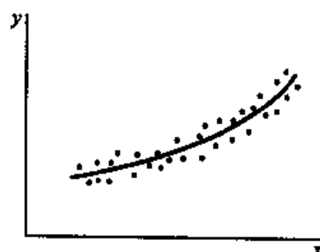


图 8-2

从散点图常可看出一条光滑的资料的近似曲线.这样的曲线常称为近似曲线.例如在图 8-1 中,资料表现为较好地近似一条直线,我们说变量间有线性关系.然而在图 8-2 中,变量之间虽然存在关系,但不是线性关系而是所谓的非线性关系.在图 8-3 中,变量间未表现出关系.

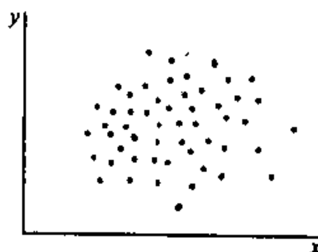


图 8-3

寻找拟合给定资料的近似曲线方程的问题,一般称为曲线拟合.在实践中散点图常能建议一个方程的形式.从图 8-1,我们可以使用直线

$$y = a + bx \tag{1}$$

而在图 8-2 中,我们试用一条抛物线或二次曲线

$$y = a + bx + cx^2 \tag{2}$$

有时候使用变换的变量作出散点图.例如,如 $\log y$ 对 x 导致一条直线,我们应试用 $\log y = a + bx$ 作为近似曲线的方程.

回归

曲线拟合的主要目的之一是从一个变量(独立变量)估计另一个变量(相依变量).估计的过程常牵涉到回归.如果按某个方程的意义从 x 估计 y,我们称该方程为 y 关于 x 的回归方程,对应的曲线称为 y 关于 x 的回归曲线.

最小二乘法

一般,有多条某一给定形式的曲线似乎都可以拟合资料集合.在构造直线、抛物线,或其他近似曲线时,为了避免个人的评价,有必要一致同意"最佳拟合直线"、"最佳拟合抛物线"等等的定义.

为了导出一个可能的定义,考虑图 8-4,资料点是$(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$.对一个给定值 x,比如 x_1,值 y_1 和由曲线 C 确定的对应值之间存在一个差.我们用 d_1 记这个差,有时这个差被称为偏差、误差等等,它可以是正的、负的或零.类似地,对值 $x_2, \cdots, x_n$ 有偏差 $d_2, \cdots, d_n$.

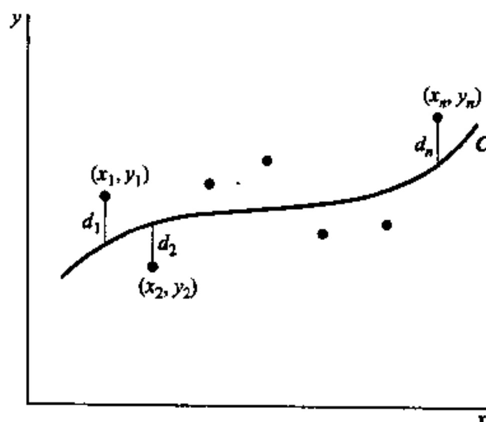


图 8-4

量 $d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2$ 提供了曲线C 对资料集合的拟合优度的一个度量.如果该值比较小,则拟合是好的,如果比较大,则拟合较差.因此做出下面的定义.

定义 若在近似 n 个资料点的集合时,对一给定的曲线族的全部曲线,其中有一条曲线有性质:$d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2$ 达最小值,则称该曲线为给定曲线族中的最佳拟合曲线.

有这样性质的一条曲线称为在最小二乘意义上对资料的拟合,该曲线称为最小二乘回归曲线,或简称最小二乘曲线.有这样性质的一条直线称为最小二乘直线,有这样性质的抛物线称为最小二乘抛物线,等等.

当 x 是独立变量而 y 是相依变量时,习惯上常采用上述定义.如果 x 是相依变量,则要修改定义,用水平偏差代替垂直偏差,这等于交换 x 和 y 轴.这两种定义方法会导致产生两条不同的最小二乘曲线.除非特别说明,我们将考虑 y 为相依变量而 x 是独立变量.

考虑资料点到曲线的距离代替竖轴距离或横轴距离,可以定义出另一种最小二乘曲线但是这种方法很少使用.

最小二乘直线

使用上面的定义,可以说明(见习题 8.3)近似点集$(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$的最小二乘直线有方程

$$y = a + bx \tag{3}$$

其中的常数 a 和 b 由下列方程组确定

$$\begin{aligned} \sum y &= an + b\sum x \\ \sum xy &= a\sum x + b\sum x^2 \end{aligned} \tag{4}$$

这个方程组称为最小二乘直线的正规方程.为了简洁一点我们用 $\sum y$, $\sum xy$ 代替 $\sum_{j=1}^{n} y_j$, $\sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.细看一下就容易记住正规方程组(4).第一个方程是对(3)的两边求和,而第二个方程是先在(3)的两边乘以 x 再求和.当然这仅是为了记住他们,而下去谈微分的正规方程式.

从(4)得到 a 和 b 的值为

$$a=\frac{\left(\sum y\right)\left(\sum x^2\right)-\left(\sum x\right)\left(\sum xy\right)}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2},\quad b=\frac{n\sum xy-\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2} \tag{5}$$

在(5)中的 b 也可写成

$$b=\frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sum(x-\overline{x})^2} \tag{6}$$

上式中按常规习惯加一横表示平均值,例如,$\overline{x}=\left(\sum x\right)/n$. 用 n 去除(4)中的第一个正规方程的两边,得

$$\overline{y}=a+b\overline{x} \tag{7}$$

我们可以从(5)或(6)先求得 b,再用(7)求得 $a=\overline{y}-b\overline{x}$. 这等价于

$$y-\overline{y}=b(x-\overline{x})\quad 或\quad y-\overline{y}=\frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sum(x-\overline{x})^2}(x-\overline{x}) \tag{8}$$

(8)的结果说明常数 b 是确定直线时的基本常数,是直线(3)的斜率. 从(8)也可看到最小二乘直线通过点$(\overline{x},\overline{y})$,这一点称为这批资料的形心或重心.

回归直线的斜率 b 与坐标原点无关,这意味着如果我们做一个变换(常称为坐标轴变换)

$$x=x'+h,\quad y=y'+k \tag{9}$$

这里 h 和 k 是任意常数,那么 b 也相应为

$$b=\frac{n\sum x'y'-\left(\sum x'\right)\left(\sum y'\right)}{n\sum x'^2-\left(\sum x'\right)^2}=\frac{\sum(x'-\overline{x}')(y'-\overline{y}')}{\sum(x'-\overline{x}')^2} \tag{10}$$

其中简单地用 x', y' 代替了 x, y(因此可以说 b 在变换(9)下是不变量). 然而, a 作为在 y 轴上的截距依赖于原点(所以不是不变量).

在 $h=\overline{x}$, $k=\overline{y}$ 的特殊情形,(10)简化为

$$b=\frac{\sum x'y'}{\sum x'^2} \tag{11}$$

(10)或(11)的结果常可使求最小二乘直线的工作量得到减轻.

对 x 关于 y 的回归直线,上面的叙述同样有效. 简单地交换 x 和 y 的位置即可求得结果. 例如, x 关于 y 的最小二乘回归直线为

$$x-\overline{x}=\frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sum(y-\overline{y})^2}(y-\overline{y}) \tag{12}$$

应注意一般(12)和(8)不是同一条直线.

用样本方差和协方差表示的最小二乘直线

x 和 y 的样本方差和协方差给定为

$$s_x^2=\frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n},\quad s_y^2=\frac{\sum(y-\overline{y})^2}{n},\quad s_{xy}=\frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{n} \tag{13}$$

用这些项, y 关于 x 或 x 关于 y 的最小二乘回归直线可分别写成

$$y-\overline{y}=\frac{s_{xy}}{s_x^2}(x-\overline{x})\quad 和\quad x-\overline{x}=\frac{s_{xy}}{s_y^2}(y-\overline{y}) \tag{14}$$

如果按照定义,样本相关系数(见第二章(54)式)为

$$r=\frac{s_{xy}}{s_xs_y} \tag{15}$$

那么(14)可写成

$$\frac{y-\overline{y}}{s_y}=r\left(\frac{x-\overline{x}}{s_x}\right) \quad 和 \quad \frac{x-\overline{x}}{s_x}=r\left(\frac{y-\overline{y}}{s_y}\right) \tag{16}$$

事实上，$(x-\overline{x})/s_x$ 和 $(y-\overline{y})/s_y$ 是标准化的样本值，因此(16)式提供了一个记住回归方程的简单方法. 显然，除非 $r=\pm 1$，在(16)式中的两条直线是不同的. $r=\pm 1$ 时，全部样本点都处于一条直线上(在(26)式中将看到). 因此存在完全线性的相关和回归.

如果(16)式中的两条回归线写成 $y=a+bx$ 和 $x=c+dy$，那么会有趣地看到

$$bd=r^2 \tag{17}$$

到现在为止我们仍未考虑相关系数的确切的显著性，仅是用方差和协方差项给出了它的定义. 在后面线性相关系数中将讨论显著性.

最小二乘抛物线

容易推广上面的概念. 例如，对一个样本点集拟合的最小二乘抛物线为

$$y=a+bx+cx^2 \tag{18}$$

其中 a,b,c 由下列正规方程确定：

$$\begin{aligned}\sum y&=na+b\sum x+c\sum x^2\\ \sum xy&=a\sum x+b\sum x^2+c\sum x^3\\ \sum x^2y&=a\sum x^2+b\sum x^3+c\sum x^4\end{aligned} \tag{19}$$

这些方程可对(18)式两边分别乘以 $1, x$ 和 x^2 后求和得到.

多元回归

上面的概念也可推广到更多的变量. 例如，如果我们觉得相依变量 z 和两个独立变量 x 和 y 间有线性关系，那么我们应寻求的变量连系方程有形式

$$z=a+bx+cy \tag{20}$$

这称为 z 关于 x 和 y 的回归方程. 如果 x 是相依变量，则类似的方程应称为 x 关于 y 和 z 的回归方程.

因为(20)式在三维直角坐标系中表示一个平面. 故也常称为回归平面. 为了求得最小二乘回归平面，在(20)式中确定 a,b,c，有

$$\begin{aligned}\sum z&=na+b\sum x-c\sum y\\ \sum xz&=a\sum x+b\sum x^2+c\sum xy\\ \sum yz&=a\sum y+b\sum xy+c\sum y^2\end{aligned} \tag{21}$$

这些方程称为(20)式对应的正规方程，可用与前面的定义类似的定义得到这一结果. 可对(20)式两边分别乘以 $1, x, y$ 再相加得到这些方程.

推广到多个变量，涉及由线性或非线性方程导出的三维或高维空间的回归曲面，推广是容易做到的.

估计的标准误差

如果利用 y 关于 x 的回归曲线，以 y_{est} 记给定 x 值时获得的 y 值的估计，那么可利用量

$$s_{y\cdot x}=\sqrt{\frac{\sum(y-y_{est})^2}{n}} \tag{22}$$

作为关于回归曲线离散程度的一个度量. 这个量称为 y 关于 x 的估计的标准误差. 由于利用前面定义中的符号有 $\sum(y-y_{est})^2=\sum d^2$，我们可以看到最小二乘曲线在全部可能的回归曲线中有最小的估计的标准误差.

在回归直线 $y_{est}=a+bx$ 时，a 和 b 由(4)式给出，有

$$s_{y\cdot x}^2 = \frac{\sum y^2 - a\sum y - b\sum xy}{n} \tag{23}$$

或

$$s_{y\cdot x}^2 = \frac{\sum (y-\overline{y})^2 - b\sum (x-\overline{x})(y-\overline{y})}{n} \tag{24}$$

对最小二乘直线也能用方差和相关系数的项表示 $s_{y\cdot x}^2$,

$$s_{y\cdot x}^2 = s_y^2(1-r^2) \tag{25}$$

从上式可推知 $r^2 \leqslant 1$, 即 $-1 \leqslant r \leqslant 1$.

这个估计的标准误差有类似于标准差的性质. 例如, 如果我们平行于 y 关于 x 的回归直线构造一些线对, 它们到回归线的竖轴距离分别是 $s_{y\cdot x}$, $2s_{y\cdot x}$ 和 $3s_{y\cdot x}$ 的话, 当 n 足够大时, 这些线对之间应含有 68%, 95% 和 99.7% 的样本点. 见习题 8.23.

正如存在一个总体方差的无偏估计 $\hat{s}^2 = ns^2/(n-1)$ 一样, 有一个估计的理论标准误差的平方的无偏估计, 有 $\hat{s}_{y\cdot x}^2 = ns_{y\cdot x}^2/(n-2)$. 由于这一点有些统计学家喜欢(22)式的分母 n 替换成 $(n-2)$.

对 x 关于 y 的回归线(这时估计的标准误差记为 $s_{x\cdot y}$)或非线性回归或多元回归, 上面的各项叙述都容易做出适宜的修正.

线性相关系数

目前我们用(15)式定义了相关系数, 但没有考察其显著性. 为了做这项工作, 注意从(25)式及 $s_{y\cdot x}$ 和 s_y 的定义, 有

$$r^2 = 1 - \frac{\sum (y-y_{\text{est}})^2}{\sum (y-\overline{y})^2} \tag{26}$$

我们也能显示(见习题 8.24)

$$\sum (y-\overline{y})^2 = \sum (y-y_{\text{est}})^2 + \sum (y_{\text{est}}-\overline{y})^2 \tag{27}$$

(27)式左边的量称为总变差, (27)式右边的第一个和称为不可解释的变差, 第二个和称为可解释的变差. 这是由于偏差 $y-y_{\text{est}}$ 是随机的或不可预见的方式引起的, 而偏差 $y_{\text{est}}-\overline{y}$ 可由最小二乘回归线得到解释. 从而倾向于下述定义模式, 从(26)和(27)有

$$r^2 = \frac{\sum (y_{\text{est}}-\overline{y})^2}{\sum (y-\overline{y})^2} = \frac{\text{可解释的变差}}{\text{总变差}} \tag{28}$$

因此, r^2 能解释成总变差中可用最小二乘回归直线解释的部分. 换句话说, r 度量了最小二乘回归直线拟合样本资料是如何地好. 如果总变差全部可用回归直线解释, 即如果 $r^2=1$ 或者 $r=\pm 1$, 我们说有纯线性相关(这时也是纯线性回归). 另一方面, 如果总变差是完全不能解释, 那么可解释的变差是零. 则 $r=0$. 实际上, 量 r^2(有时称为测定系数)处于 0 和 1 之间.

由下列两式可计算相关系数:

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\sum (x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sqrt{\sum (x-\overline{x})^2}\sqrt{\sum (y-\overline{y})^2}} \tag{29}$$

或

$$r^2 = \frac{\text{可解释的变差}}{\text{总变差}} = \frac{\sum (y_{\text{est}}-\overline{y})^2}{\sum (y-\overline{y})^2} \tag{30}$$

对线性回归两者是等价的. 公式(29)常称为线性相关的乘积矩公式.

在实际工作中也常用上述式子的另一些等价公式

$$r=\frac{n\sum xy-\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{\left[n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2\right]\left[n\sum y^2-\left(\sum y\right)^2\right]}} \tag{31}$$

和

$$r=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2}-\overline{x}^2)(\overline{y^2}-\overline{y}^2)}} \tag{32}$$

如果使用前面提到的变换(9)式,则有

$$r=\frac{n\sum x'y'-\left(\sum x'\right)\left(\sum y'\right)}{\sqrt{\left[n\sum x'^2-\left(\sum x'\right)^2\right]\left[n\sum y'^2-\left(\sum y'\right)^2\right]}} \tag{33}$$

上式说明在坐标轴变换下 r 是一个不变量.实际上当 $h=\overline{x}$, $k=\overline{y}$ 时,(33)式变成

$$r=\frac{\sum x'y'}{\sqrt{\left(\sum x'^2\right)\left(\sum y'^2\right)}} \tag{34}$$

在计算中常使用上式.

线性相关系数可以是正的,也可以是负的.如果 r 为正,y 倾向于随 x 增大而增大(最小二乘直线的斜率为正);如果 r 为负,y 倾向于随 x 增大而减小(斜率为负).如果使用(29),(31),(32),(33)和(34)式会自动得到符号.然而,如果用(30)式求 r,我们必须运用适当的符号.

广义相关系数

定义式(29)(或等价的(31)至(34)式)的相关系数仅涉及样本值 x, y.因而对一切形式的回归曲线它产生相同的数,除非在直线回归,这个数作为拟合的度量是无用的.在直线回归时,(30)式的结果与这个数一致.然而这后一种定义,也就是

$$r^2=\frac{\text{可解释的变差}}{\text{总变差}}=\frac{\sum(y_{\text{est}}-\overline{y})^2}{\sum(y-\overline{y})^2} \tag{35}$$

影响到回归曲线的形式(经由 y_{est}),所以作为广义相关系数 r 的定义是合适的.我们使用(35)式获得非线性相关系数(它度量一个非线性回归曲线拟合资料的程度),或者适当地推广到复相关系数.相关系数和估计的标准误差间的联系(25)式对非线性相关同样保持.

由于一个相关系数仅是度量一个给定的回归曲线(或曲面)是否较好地拟合了样本资料,当资料是非线性时,线性相关系数显然是没有意义的.假设一个人将(29)式用于非线性资料,并且得到一个数值上比 1 小得多的值.那么并不能得出仅有一点相关的结论(这一结论常为不熟悉相关理论基础的人作出),而是仅有一点线性相关.事实上可能存在大的非线性相关.

秩相关

当样本的精确值不可获得或代替样本精确值,可将资料按大小、重要性等排序,用数值 1, 2, …, n.如果两个相应的 x 值和 y 值的集合按此方式排序,则可给出秩相关系数,记为 $r_{\text{秩}}$ 或简单写为 r(见习题 8.36),

$$r_{\text{秩}}=1-\frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)} \tag{36}$$

这里

d = 相应的 x 和 y 的秩之差,

n = 资料中值 (x, y) 的对的个数,

在(36)式中的量 $r_{\text{秩}}$ 称为斯皮尔曼(Spearman)秩相关系数.

回归的概率解释

对一个特定样本,散点图8-1是相应资料点的图形表示.通过从中选取一个不同的样本或

扩充原有的样本，一般会得到有一些不同的散点图，那么，尽管当这些样本都取自同一总体，我们也希望它们相互间没有显著差异，不同的散点图仍会产生不同的回归直线或曲线.

从对样本曲线拟合的概念，导致我们去对抽取样本的总体拟合曲线.一条回归直线或曲线附近的散布点说明对一个特定的 x 值，在直线或曲线附近确实有 y 分布的各种点.分布的想法自然会使我们去阐明曲线拟合和概率之间的某种连系.

引进在各样本值 x 和 y 分别取值的随机变量 X 和 Y 来阐明这种连系.例如，X 和 Y 可以表示抽取样本的总体中成年男子的身高和重量.那么假定 X 和 Y 有一个联合概率函数或密度函数 $f(x,y)$，相应于离散的或连续的变量.

给定两个随机变量 X 和 Y 的联合密度函数和概率函数.从前面的叙述自然会问是否存在一个函数 $g(x)$ 使

$$E\{[Y-g(X)]^2\} = \text{最小值} \tag{37}$$

具(37)式性质的方程 $y=g(x)$ 确定的曲线称为 Y 关于 X 的最小二乘回归曲线，有下列定理.

定理 8-1　如果 X 和 Y 是随机变量，有联合密度函数或概率函数，那么，当 X 和 Y 均具有有限方差时，存在具有性质(37)式的一条 Y 关于 X 的最小二乘回归曲线

$$y = g(x) = E(Y \mid X = x) \tag{38}$$

其中 $E(Y|X=x)$ 是第二章定义的，给定 $X=x$ 时，Y 的条件期望.

对 X 关于 Y 的最小二乘回归曲线可作类似的阐述，此时(37)式替换成

$$E\{[X-h(Y)]^2\} = \text{最小值}$$

而(38)替换成 $x=h(y)=E(X|Y=y)$.一般两个回归曲线 $y=g(x)$ 和 $x=h(y)$ 是不同的.

联合分布为第二章(49)式的二元正态分布是一种感兴趣的情形，这时有下述定理.

定理 8-2　如果 X 和 Y 是具有二元正态分布的随机变量，那么 Y 关于 X 的最小二乘回归曲线是一条回归直线，为

$$\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} = \rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right) \tag{39}$$

这里

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{40}$$

表示总体的相关系数.

(39)式也可写成

$$y-\mu_Y = \beta(x-\mu_X) \tag{41}$$

这里

$$\beta = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} \tag{42}$$

对 X 关于 Y 的最小二乘回归曲线可作类似的阐述.它也必然是一条直线(在(39)式中交换 X 和 Y 及 x 和 y).可将这些结果与本章(16)式及(14)式进行比较.

在 $f(x,y)$ 是未知时，我们仍能使用准则(37)式去寻求近似的关于总体的回归曲线.例如，如果假定 $g(x)=\alpha+\beta x$，我们会得到回归直线(39)，其中 α,β 由未知参数 $\mu_X,\mu_Y,\sigma_X,\sigma_Y,\rho$ 等项给出.类似地，如果 $g(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2$，我们可得到一条最小二乘回归抛物线，等等.见习题 8.39.

一般，前面对样本的最小二乘回归的叙述容易推广到总体上.例如，总体情况下的估计的标准误差用方差和相关系数项给定为

$$\sigma_{Y.X}^2 = \sigma_Y^2(1-\rho^2) \tag{43}$$

可与前面的(25)式进行比较.

相关的概率解释

从上面的叙述清楚地看到，总体相关系数提供了给定的总体回归曲线是否较好地拟合了总体资料的一种度量．前面关于样本间相关的各种叙述均可很好地用到总体上．例如，由(37)式确定了 $g(x)$，令 $Y_{est}=g(X)$，$\overline{Y}=E(Y)$，则

$$E[(Y-\overline{Y})^2]=E[(Y-Y_{est})^2]+E[(Y_{est}-\overline{Y})^2] \tag{44}$$

在(44)式中的三个量分别称为总的、不可解释的、可解释的变差．由此导出总体相关系数的定义 ρ，

$$\rho^2=\frac{\text{可解释的变差}}{\text{总变差}}=\frac{E[(Y_{est}-\overline{Y})^2]}{E[(Y-\overline{Y})^2]} \tag{45}$$

在线性的情况，上式简化为(40)式．对总体的情况线性回归时，类似(30)至(34)式的结果也可被写出．(45)式的结果也可用来定义非线性情况下的 ρ．

回归的抽样理论

基于样本资料可获得回归方程 $y=a+bx$．我们也常对抽取出样本的总体感兴趣，对应的回归方程 $y=\alpha+\beta x$．下面是与正态分布有关的一些检验．为了使记号简单，以下约定随机变量自身与抽取的样本值用同一个记号．

1．假设 $\beta=b$ 的检验

为了检验假设：回归系数 β 等于某一特定值 b，使用统计量

$$t=\frac{\beta-b}{s_{y.x}/s_x}\sqrt{n-2} \tag{46}$$

它具有 $n-2$ 自由度的学生氏分布．这一结论也可用于从样本值求总体回归系数的置信区间．见习题 8.43 和 8.44．

2．预报值的假设检验

设 y_0 是 $x=x_0$ 时 y 的预报值，它是从样本回归方程得到的估计，即 $y_0=a+bx_0$．设 y_p 记对总体而言 $x=x_0$ 对应的 y 的预报值．那么，统计量

$$t=\frac{(y_0-\overline{y}_p)\sqrt{n-2}}{s_{y.x}\sqrt{n+1+[n(x_0-\overline{x})^2/s_x^2]}} \tag{47}$$

有 $n-2$ 个自由度的学生氏分布．由此能求得预报的总体值的置信限，见习题 8.45．

3．预报的平均值的假设检验

设 y_0 记对应 $x=x_0$ 的 y 的预报值，它是从样本回归方程得到的估计，即 $y_0=a+bx_0$．又设 $\overline{y_p}$ 记对总体而言 $x=x_0$ 对应的 y 的预报平均值(即 $\overline{y_p}=E(Y|X=x_0)$)．那么，统计量

$$t=\frac{(y_0-\overline{y}_p)\sqrt{n-2}}{s_{y.x}\sqrt{1+[(x_0-\overline{x})^2/s_x^2]}} \tag{48}$$

有 $n-2$ 个自由度的学生氏分布．由此能求得预报的平均总体值的置信限，见习题 8.46．

相关的抽样理论

我们经常要从样本的相关系数 r 估计总体的相关系数 ρ，或者检验有关 ρ 的假设．为此我们必须知道 r 的抽样分布．在 $\rho=0$ 的情形，这个分布是对称的，且有一个具有学生氏分布的统计量可以利用．对 $\rho\neq0$，这个分布是偏斜的．这种情形，费歇耳(Fisher)作出的变换构造了一个统计量，它近似正态分布．下面的检验概括了这一构造．

1．假设 $\rho=0$ 的检验

使用下列事实：统计量

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \tag{49}$$

有 $n-2$ 个自由度的学生氏分布，见习题 8.47 和 8.48.

2. 假设 $\rho=\rho_0\neq 0$ 的检验

使用下列事实：统计量

$$Z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = 1.1513\log_{10}\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \tag{50}$$

有近似正态分布，具有下列均值和标准差

$$\mu_z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right) = 1.1513\log_{10}\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right), \quad \sigma_Z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} \tag{51}$$

这一事实也能用于求相关系数的置信限，见习题 8.49 和 8.50.(50)式的变换称为费歇耳的 Z 变换.

3. 相关系数间的差的显著性

从大小分别为 n_1 和 n_2 的样本得到两个相关系数 r_1 和 r_2，确定它们间是否有显著差异，利用(50)式对应 r_1 和 r_2 计算出 Z_1 和 Z_2，然后使用下列事实：检验统计量

$$z = \frac{Z_1 - Z_2 - \mu_{Z_1-Z_2}}{\sigma_{Z_1-Z_2}} \tag{52}$$

这里

$$\mu_{Z_1-Z_2} = \mu_{Z_1} - \mu_{Z_2}, \quad \sigma_{Z_1-Z_2} = \sqrt{\sigma_{Z_1}^2 + \sigma_{Z_2}^2} = \sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}} \tag{53}$$

是近似正态分布，见习题 8.51.

相关和相依

当两个随机变量 X 和 Y 有非零的相关系数 ρ 时，我们知道(第三章定理 3～15)它们在概率意义上是相依的(也就是联合分布不能折成边缘分布的乘积).进而当 $\rho\neq 0$ 时，能使用(39)式那样的方程预报对应 X 值的 Y 值.

上述意义上的"相关"和"相依"并非必须蕴含 X 和 Y 的直接因果相互依赖.搞清这一点是重要的.下面的例子说明了这一点.

例 8.1 设 X 和 Y 是表示个人身高和体重的随机变量.这里 X 和 Y 之间存在一个直接的相互依赖.

例 8.2 如果 X 表示教员们一年的薪金，而 Y 表示犯罪的数量，它们的相关系数可能异于零，而且我们可以求回归方程，从一个预报另一个.但是我们很难认为 X 和 Y 间存在一个直接的相互依赖.

习 题 解 答

最小二乘直线

8.1 一条直线通过点(x_1,y_1)和(x_2,y_2).说明该直线为

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)$$

解 一条直线的方程为 $y=a+bx$.由于(x_1,y_1)和(x_2,y_2)在直线上，故有

$$y_1 = a + bx_1, \quad y_2 = a + bx_2$$

因此

(1) $$y - y_1 = (a+bx) - (a+bx_1) = b(x-x_1)$$

(2)　　$y_2 - y_1 = (a + bx_2) - (a + bx_1) = b(x_2 - x_1)$

从(2)可得 $b = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$，代入(1)即得所求的结果.

图 8-5 中给出了直线 PQ 的图，常数 $b = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ 是直线的斜率.

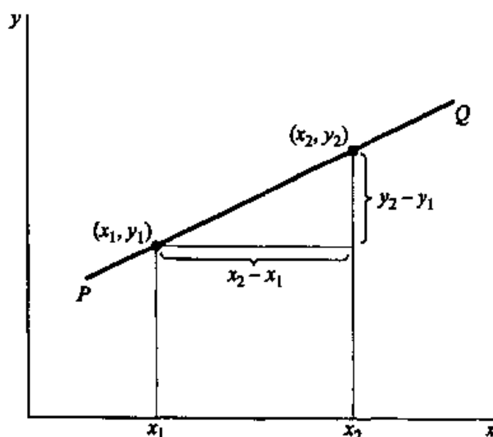


图 8-5

8.2　(a)对表 8-1 的资料构造一条近似直线，(b)为该直线找一个方程.

表 8-1

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

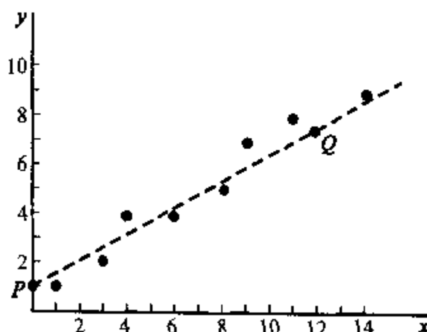


图 8-6

解 (a)如图 8-6 所示，在一个直角坐标系中画出点(1,1)，(3,2)，(4,4)，(6,4)，(8,5)，(9,7)，(11,8)和(14,9). 在图中随手画出了一条近似这些点的直线. 能消除为单个点的评价的一种方法(见习题 8.4)是使用最小二乘法.

(b)为求得(a)中构造的直线的方程，在直线上任选两点，比如 P 和 Q. 从图中近似地读出这两点的坐标为(0,1)和(12,7.5). 那么从习题 8.1，得

$$y - 1 = \frac{7.5 - 1}{12 - 0}(x - 0)$$

或 $y - 1 = 0.542x$ 或 $y = 1 + 0.542x$.

8.3　对最小二乘法，求出本章的正规方程(4).

解 看图 8-7，在最小二乘直线上对应 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 y 值为

$$a + bx_1, a + bx_2, \cdots, a + bx_n$$

相应的纵轴偏差是

$$d_1 = a + bx_1 - y_1, \quad d_2 = a + bx_2 - y_2, \quad \cdots, \quad d_n = a + bx_n - y_n$$

从而偏差的平方和为

$$d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2 = (a + bx_1 - y_1)^2 + (a + bx_2 - y_2)^2 + \cdots + (a + bx_n - y_n)^2$$

或

$$\sum d^2 = \sum (a + bx - y)^2$$

这是 a 和 b 的函数，即 $F(a, b) = \sum (a + bx - y)^2$. 使此函数达最小(或最大)的必要条件是

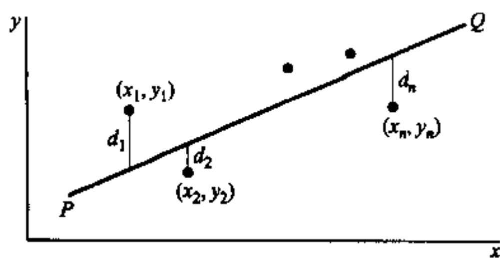


图 8-7

$\partial F/\partial a = 0, \partial F/\partial b = 0$, 由于

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum \frac{\partial}{\partial a}(a + bx - y)^2 = \sum 2(a + bx - y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum \frac{\partial}{\partial b}(a + bx - y)^2 = \sum 2x(a + bx - y)$$

我们有

$$\sum (a + bx - y) = 0, \qquad \sum x(a + bx - y) = 0$$

即

$$\sum y = an + b\sum x, \qquad \sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$

这就是所求的.很容易阐明满足上式可达最小值.

8.4 对习题 8.2 的资料拟合最小二乘直线,(a)将 x 作为独立变量,(b)将 x 作为相依变量.

解 (a)直线方程为 $y = a + bx$,正规方程为

$$\sum y = an + b\sum x$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$

计算各个和的工作可安排为表 8-2.虽然对习题的本部分,表的最后一行并不是必须的,但在(b)中要将它们相加.

由于有 8 对 x, y 值,$n = 8$,正规方程变为

$$8a + 56b = 40$$

$$56a + 524b = 364$$

联立解出 $a = \frac{6}{11}$ 或 0.545, $b = \frac{7}{11}$ 或 0.636.要求的最小二乘直线为 $y = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}x$ 或 $y = 0.545 + 0.636x$.注意这不是在习题 8-2 中随手画出的直线.

表 8-2

x	y	x^2	xy	y^2
1	1	1	1	1
3	2	9	6	4
4	4	16	16	16
6	4	36	24	16
8	5	64	40	25
9	7	81	63	49
11	8	121	88	64
14	9	196	126	81
$\sum x = 56$	$\sum y = 40$	$\sum x^2 = 524$	$\sum xy = 364$	$\sum y^2 = 256$

另解

$$a=\frac{\left(\sum y\right)\left(\sum x^2\right)-\left(\sum x\right)\left(\sum xy\right)}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}=\frac{40\times524-56\times364}{8\times524-56^2}=\frac{6}{11}\quad 或\quad 0.545$$

$$b=\frac{n\sum xy-\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}=\frac{8\times364-56\times40}{8\times524-56^2}=\frac{7}{11}\quad 或\quad 0.636$$

(b)如果将 x 考虑为相依变量而 y 作为独立变量,最小二乘直线的方程为 $x=c+dy$,正规方程为

$$\sum x=cn+d\sum y$$
$$\sum xy=c\sum y+d\sum y^2$$

使用表 8-2,正规方程成为

$$8c+40d=56$$
$$40c+256d=364$$

由此 $c=-\frac{1}{2}$或 -0.5, $d=\frac{3}{2}$或 1.50.这些值也能如下求得:

$$c=\frac{\left(\sum x\right)\left(\sum y^2\right)-\left(\sum y\right)\left(\sum xy\right)}{n\sum y^2-\left(\sum y\right)^2}=\frac{56\times256-40\times364}{8\times256-40^2}=-0.50$$

$$d=\frac{n\sum xy-\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\sum y^2-\left(\sum y\right)^2}=\frac{8\times364-56\times40}{8\times256-40^2}=1.50$$

因此所求的最小二乘直线方程为 $x=-0.50+1.50y$.

对这个方程解 y,得 $y=0.333+0.667x$.这与(a)中获得的直线不同.

8.5 画出习题 8.4 中获得的两条直线.

解 ☞ 图 8-8 画出了两条直线 $y=0.545+0.636x$和 $x=-0.50+1.50y$.注意,这里两条直线实际上相当一致,这一点指明用线性关系可很好地描述这批资料.

在(a)中获得的直线常称为 y 关于 x 的回归线,被用于给定 x 值时估计 y.在(b)中获得的直线称为 x 关于 y 的回归线,用于从给定的 y 值估计 x.

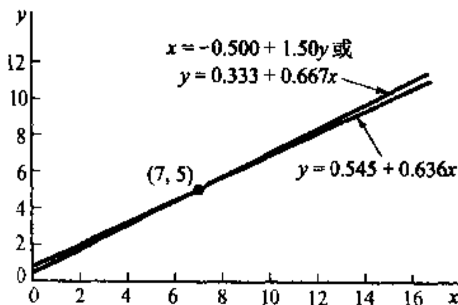


图 8-8

8.6 (a)说明在习题 8.4 中获得的两条最小二乘直线在点$(\bar{x},\bar{y})$相交,(b)当 $x=12$ 时,估计 y 的值,(c)当 $y=3$ 时,估计 x 的值.

解 ☞ $\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{56}{8}=7,\quad \bar{y}=\frac{\sum y}{n}=\frac{40}{8}=5$

点$(\bar{x},\bar{y})$是(7,5),称为形心.

(a)由于 $5=\frac{6}{11}+\frac{7}{11}(7)$,点(7,5)在直线 $y=0.545+0.636x$ 上,或更精确一点,在 $y=\frac{6}{11}+\frac{7}{11}x$ 上.

由于 $7=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(5)$,点(7,5)在直线 $x=\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}y$ 上.

另解 两个直线的方程是 $y=\frac{6}{11}+\frac{7}{11}x$ 和 $x=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}y$,联立解方程,得 $x=7,y=5$.因此两直线交于(7,5).

(b)将 $x=12$ 代入 y 关于 x 的回归直线,$y=0.545+0.636(12)=8.2$.

(c)将 $y=3$ 代入 x 关于 y 的回归直线,$x=-0.50+1.50(3)=4.0$.

8.7 证明一条最小二乘直线总是通过点$(\bar{x},\bar{y})$.

证明 ☞ **情形 1** x 是独立变量.

最小二乘直线的方程是　(1) $y=a+bx$

最小二乘直线的一个正规方程是　(2) $\sum y=an+b\sum x$

用 n 除(2)的两边,得　(3) $\bar{y}=a+b\bar{x}$

从(1)减去(3),最小二乘直线可写成

(4) $$y-\bar{y}=b(x-\bar{x})$$

这说明该直线通过点$(\bar{x},\bar{y})$.

情形 2　y 是独立变量.

在情形 1 中将 x 和 y 变换,且分别以常数 c,d 代替 a,b.我们能求得的最小二乘回归直线可写成

(5) $$x-\bar{x}=d(y-\bar{y})$$

这说明该直线通过点$(\bar{x},\bar{y})$.

一般直线(4)和(5)不相重,仅是交于$(\bar{x},\bar{y})$.

8.8　证明 y 关于 x 的最小二乘回归直线可以写成本章的(8)式.

证明　从习题8.7的(4),有 $y-\bar{y}=b(x-\bar{x})$,而从本章(5)式中的第二个方程,有

(1) $$b=\frac{n\sum xy-\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}$$

现在

$$\begin{aligned}\sum(x-\bar{x})^2&=\sum(x^2-2\bar{x}x+\bar{x}^2)\\&=\sum x^2-2\bar{x}\sum x+\sum\bar{x}^2\\&=\sum x^2-2n\bar{x}^2+n\bar{x}^2\\&=\sum x^2-n\bar{x}^2=\sum x^2-\frac{1}{n}\left(\sum x\right)^2\\&=\frac{1}{n}\left[n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2\right]\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})&=\sum(xy-\bar{x}y-\bar{y}x+\bar{x}\bar{y})\\&=\sum xy-\bar{x}\sum y-\bar{y}\sum x+\sum\bar{x}\bar{y}\\&=\sum xy-n\bar{x}\bar{y}-n\bar{y}\bar{x}+n\bar{x}\bar{y}\\&=\sum xy-n\bar{x}\bar{y}\\&=\sum xy-\frac{\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n}\\&=\frac{1}{n}\left[n\sum xy-\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)\right]\end{aligned}$$

因此,(1)变成

$$b=\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2}$$

由此即可获得(8)式的结果.本章(12)式的证明,只需交换一下 x 和 y.

8.9　设 $x=x'+h,y=y'+k,h$ 和 k 是任意的常数,证明

$$b=\frac{n\sum xy-\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}=\frac{n\sum x'y'-\left(\sum x'\right)\left(\sum y'\right)}{n\sum x'^2-\left(\sum x'\right)^2}$$

证明　从习题8.8,有

$$b=\frac{n\sum xy-\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}=\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2}$$

如果 $x=x'+h,y=y'+k$,有

$$\bar{x}=\bar{x}'+h,\qquad\bar{y}=\bar{y}'+k$$

那么

$$\frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sum(x-\overline{x})^2}=\frac{\sum(x'-\overline{x}')(y'-\overline{y}')}{\sum(x'-\overline{x}')^2}$$

$$=\frac{n\sum x'y'-\left(\sum x'\right)\left(\sum y'\right)}{n\sum x'^2-\left(\sum x'\right)^2}$$

上述结果在求最小二乘直线的简化计算方面是有用的,可以从 x 和 y 的给定值中减去一个适当的常数.

8.10 特别,如果在习题 8.9 中,$h=\overline{x}$,$k=\overline{y}$,则有

$$b=\frac{\sum x'y'}{\sum x'^2}$$

解 由于

$$\sum x'=\sum(x-\overline{x})=\sum x-n\overline{x}=0$$

类似地 $\sum y'=0$,从习题 8.9 立刻可得本题结论.

8.11 表 8-3 列出了一个样本中的 12 个父亲和他的长子的身高 x 和 y.(a)构造一个散点图,(b)求 y 关于 x 的最小二乘回归直线,(c)求 x 关于 y 的最小二乘回归直线.

表 8-3

父亲身高 x(英寸)	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
儿子身高 y(英寸)	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

解 (a)在直角坐标系中画出点(x,y),散点图如图 8-9.

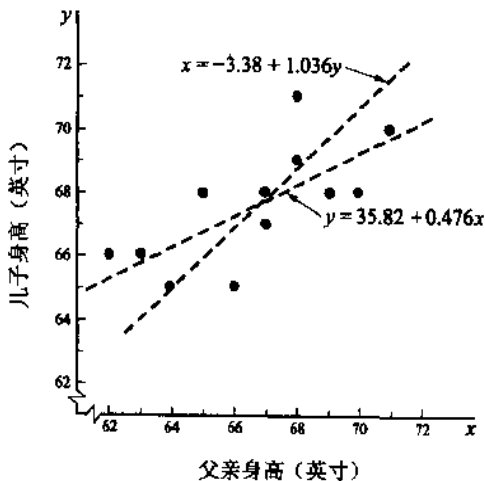


图 8-9

(b)y 关于 x 的回归直线为 $y=a+bx$,解正规方程可获得 a 和 b:

$$\sum y=an+b\sum x$$

$$\sum xy=a\sum x+b\sum x^2$$

表 8-4 列出了这些和,故正规方程变为

$$12a+800b=811$$

$$800a+53\ 418b=54\ 107$$

由此求得 $a=35.82$ 和 $b=0.476$,故 $y=35.82+0.476x$.这个方程的图画在图 8-9 中.

表 8-4

x	y	x^2	xy	y^2
65	68	4225	4420	4624
63	66	3969	4158	4356
67	68	4489	4556	4624
64	65	4096	4160	4225
68	69	4624	4692	4761
62	66	3844	4092	4356
70	68	4900	4760	4624
66	65	4356	4290	4225
68	71	4624	4828	5041
67	67	4489	4489	4489
69	68	4761	4692	4624
71	70	5041	4970	4900
$\sum x=800$	$\sum y=811$	$\sum x^2=53418$	$\sum=54107$	$\sum y^2=54849$

另解

$$a=\frac{\left(\sum y\right)\left(\sum x^2\right)-\left(\sum x\right)\left(\sum xy\right)}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}=35.82$$

$$b=\frac{n\sum xy-\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}=0.476$$

(c)x 关于 y 的回归直线为 $x=c+dy$，解正规方程可获得 c 和 d

$$\sum x=cn+d\sum y,\quad \sum xy=c\sum y+d\sum y^2$$

用表 8-4 中的和数，变成

$$12c+811d=800$$

$$811c+54\,849d=54\,107$$

由此得 $c=-3.38$ 和 $d=1.036$，故 $x=-3.38+1.036y$. 这一方程的图画在图 8-9 中.

另解

$$c=\frac{\left(\sum x\right)\left(\sum y^2\right)-\left(\sum y\right)\left(\sum xy\right)}{n\sum y^2-\left(\sum y\right)^2}=-3.38$$

$$d=\frac{n\sum xy-\left(\sum y\right)\left(\sum x\right)}{n\sum y^2-\left(\sum y\right)^2}=1.036$$

8.12 利用习题 8.9 的方法解习题 8.11.

解 从 x 和 y 减去一个适当的值，比如 68(从 x 和 y 减的值可以不同). 这样得到表 8-5.

从表可得

$$b=\frac{n\sum x'y'-\left(\sum x'\right)\left(\sum y'\right)}{n\sum x'^2-\left(\sum x'\right)^2}$$

$$=\frac{12\times 47-(-16)\times(-5)}{12\times 106-16^2}=0.476$$

表 8-5

x'	y'	x'^2	$x'y'$	y'^2
3	0	9	0	0
-5	-2	25	10	4
-1	0	1	0	0
-4	3	16	12	9
0	1	0	0	1
-6	-2	36	12	4
2	0	4	0	0
-2	-3	4	6	9
0	3	0	0	9
-1	-1	1	1	1
1	0	1	0	0
3	2	9	6	4
$\sum x' = -16$	$\sum y' = -5$	$\sum x'^2 = 106$	$\sum x'y' = 47$	$\sum y'^2 = 41$

且由于 $x' = x - 68, y' = y - 68$,故有 $\overline{x'} = \overline{x} - 68, \overline{y'} = \overline{y} - 68$.那么

$$\overline{x} = \overline{x'} + 68 = -\frac{16}{12} + 68 = 66.67$$

$$\overline{y} = \overline{y'} + 68 = -\frac{5}{12} + 68 = 67.58$$

所求的 y 关于 x 的回归直线为 $y - \overline{y} = b(x - \overline{x})$,即

$$y - 67.58 = 0.476(x - 66.07) \quad 或 \quad y = 35.85 + 0.476x$$

除去四舍五入的误差外,这个结果与习题 8.11 一致.x 关于 y 的回归直线可类似地获得.

可化为线性形式的非线性方程

8.13 表 8-6 给出了对应于各种体积值 V,一给定气体团的实验的压力值 P.根据热力学原理,变量间应存在关系 $PV^{\gamma} = C$,这里 γ 和 C 是常数,(a)求 γ 和 C 的值,(b)写出 P 和 V 的连系方程,(c)当 $V = 100.0$ 英寸^3 时估计 P.

表 8-6

体积 V(英寸^3)	54.3	61.8	72.4	88.7	118.6	194.0
压力 P(磅/英寸^2)	61.2	49.5	37.6	28.4	19.2	10.1

解 ☞ 由于 $PV^{\gamma} = C$,对其取 10 为底的对数,得

$$\log P + \gamma \log V = \log C \quad 或 \quad \log P = \log C - \gamma \log V$$

令 $\log V = x$ 和 $\log P = y$,最小二乘方程可写成

(1)　　$$y = a + bx$$

这里 $a = \log C, b = -\gamma$.

表 8-7 列出了表 8-6 中 V 和 P 值对应的 x 和 y 的值,也列出了计算最小二乘回归直线(1)时涉及的一些计算量.

对应最小二乘直线(1)的正规方程为

表 8-7

$x=\log V$	$y=\log P$	x^2	xy
1.7348	1.7868	3.0095	3.0997
1.7910	1.6946	3.2077	3.0350
1.8597	1.5752	3.4585	2.9294
1.9479	1.4533	3.7943	2.8309
2.0741	1.2833	4.3019	2.6617
2.2878	1.0043	5.2340	2.2976
$\sum x = 11.6953$	$\sum y = 8.7975$	$\sum x^2 = 23.0059$	$\sum xy = 16.8543$

$$\sum y = an + b\sum x$$
$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$

从而

$$a = \frac{\left(\sum y\right)\left(\sum x^2\right) - \left(\sum x\right)\left(\sum xy\right)}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = 4.20$$

$$b = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = -1.40$$

那么 $y = 4.20 - 1.40x$.

(a)由于 $a = 4.20 = \log C$ 和 $b = -1.40 = -\gamma$，故有

$$C = 1.60 \times 10^4 \text{ 和 } \gamma = 1.40.$$

(b)$PV^{1.40} = 16000$.

(c)当 $V = 100$ 时，$x = \log V = 2$，$y = \log P = 4.20 - 1.40(2) = 1.40$，故 $P = 10^{1.40} = 25.1$ 磅/英寸^2.

8.14 用 log-log 坐标纸画出资料，解习题 8.13.

解 从表 8-6 中压力 P 和体积 V 的每一对数值，在特殊结构的 log-log 坐标纸上画出这些点，见图 8-10.

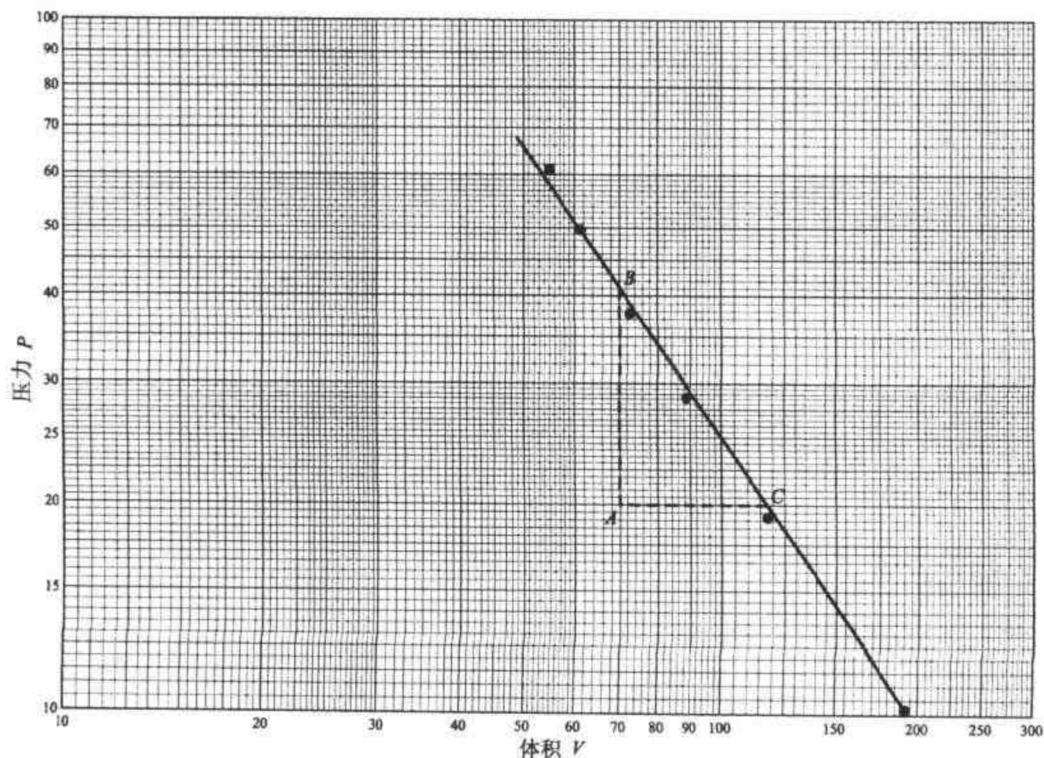


图 8-10

图 8-10 中也画出这些点的一条近似直线(随手画出的).产生的这张图说明 $\log P$ 和 $\log V$ 之间存在线性关系,可表示为方程

$$\log P = a + b\log V \quad \text{或} \quad y = a + bx$$

斜率 b 数值可用 AB 的长度对 AC 的长度的比值给出,这时是负值.量一下可得 $b = -1.4$.为了求 a,需要直线上的一个点.例如,在图中 $V = 100, P = 25$,那么

$$a = \log P - b\log V = \log 25 + 1.4\log 100 = 1.4 + (1.4)(2) = 4.2$$

这样

$$\log P + 1.4\log V = 4.2, \quad \log PV^{1.4} = 4.2, \quad PV^{1.4} = 16\ 000$$

最小二乘抛物线

8.15 对最小二乘抛物线

$$y = a + bx + cx^2$$

求出本章的正规方程(19).

解 设样本点为$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$.在最小二乘抛物线上对应 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 y 值为

$$a + bx_1 + cx_1^2, \quad a + bx_2 + cx_2^2, \quad \cdots, \quad a + bx_n + cx_n^2$$

因此,与 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的偏差为

$$d_1 = a + bx_1 + cx_1^2 - y_1, \quad d_2 = a + bx_2 + cx_2^2 - y_2, \quad \cdots, \quad d_n = a + bx_n + cx_n^2 - y_n$$

这些偏差的平方和为

$$\sum d^2 = \sum (a + bx + cx^2 - y)^2$$

这是 a, b, c 的函数,即

$$F(a, b, c) = \sum (a + bx + cx^2 - y)^2$$

为了极小化此函数,必须有

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c} = 0$$

现在

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum \frac{\partial}{\partial a}(a + bx - cx^2 - y)^2 = \sum 2(a + bx + cx^2 - y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum \frac{\partial}{\partial b}(a + bx + cx^2 - y)^2 = \sum 2x(a + bx + cx^2 - y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \sum \frac{\partial}{\partial c}(a + bx + cx^2 - y)^2 = \sum 2x^2(a + bx + cx^2 - y)$$

简化这些和式并令它们等于 0,即得本章(19)式的方程.

8.16 对表 8-8 的资料拟合 $y = a + bx + cx^2$ 形式的最小二乘抛物线.

表 8-8

x	1.2	1.8	3.1	4.9	5.7	7.1	8.6	9.8
y	4.5	5.9	7.0	7.8	7.2	6.8	4.5	2.7

解 正规方程为

$$\begin{aligned} \sum y &= an + b\sum x + c\sum x^2 \\ \sum xy &= a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3 \\ \sum x^2 y &= a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4 \end{aligned} \tag{1}$$

计算和式的工作列在表 8-9 中.

表 8-9

x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1.2	4.5	1.44	1.73	2.08	5.40	6.48
1.8	5.9	3.24	5.83	10.49	10.62	19.12
3.1	7.0	9.61	29.79	92.35	21.70	67.27
4.9	7.8	24.01	117.65	576.48	38.22	187.28
5.7	7.2	32.49	185.19	1055.58	41.04	233.93
7.1	6.8	50.41	357.91	2541.16	48.28	342.79
8.6	4.5	73.96	636.06	5470.12	38.70	332.82
9.8	2.7	96.04	941.19	9223.66	26.46	259.31
$\sum x=$ 42.2	$\sum y=$ 46.4	$\sum x^2=$ 291.20	$\sum x^3=$ 2275.35	$\sum x^4=$ 18 971.92	$\sum xy=$ 230.42	$\sum x^2y=$ 1449.00

由于 $n=8$,正规方程变成

$$8a+42.2b+291.20c=46.4$$

(2)
$$42.2a+291.20b+2275.35c=230.42$$

$$291.20a+2275.35b+18971.92c=1449.00$$

解得 $a=2.588, b=2.065, c=-0.2110$.因此所求的最小二乘抛物线有方程

$$y=2.588+2.065x-0.2110x^2$$

8.17 利用习题 8.16 的最小二乘抛物线,估计给定 x 值时的 y 值.

解 ☞ 对 $x=1.2$, $y_{est}=2.588+2.065(1.2)-0.2110(1.2)^2=4.762$.类似地可估出其他值.表 8-10将这些值和 y 的实测值一起列在表中.

表 8-10

y_{est}	4.762	5.621	6.962	7.640	7.503	6.613	4.741	2.561
y	4.5	5.9	7.0	7.8	7.2	6.8	4.5	2.7

多元回归

8.18 按 $z=a+bx+cy$ 形式的回归方程,从变量 x 和 y 估计变量 z 的值.说明获得最小二乘回归方程所确定的 a,b 和 c 满足本章的(21)式.

解 ☞ 设样本点是 $(x_1,y_1,z_1),\cdots,(x_n,y_n,z_n)$.基于最小二乘回归平面对应 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ 的 z 值分别为

$$a+bx_1+cy_1,\quad \cdots,\quad a+bx_n+cy_n$$

因此与 $z_1,\cdots,z_n$ 的偏差为

$$d_1=a+bx_1+cy_1-z_1,\quad \cdots,\quad d_n=a+bx_n+cy_n-z_n$$

偏差的平方和为

$$\sum d^2=\sum(a+bx+cy-z)^2$$

将上式考虑为 a,b,c 的函数,对 a,b,c 取偏微分,使其等于0,即获得(21)式所要求的正规方程.

8.19 表 8-11 列出了 12 个男孩的体重 z(精确到磅),身高 x(精确到英寸)和年龄 y(最接近的年).(a)求 z 关于 x 和 y 的最小二乘回归方程,(b)从给定的 x 和 y 的值确定 z 值的估计,(c)估计一个 9 岁和身高 54 英寸男孩的体重.

表 8-11

体重(z)	64	71	53	67	55	58	77	57	56	51	76	68
身高(x)	57	59	49	62	51	50	55	48	52	42	61	57
年龄(y)	8	10	6	11	8	7	10	9	10	6	12	9

解 (a)z 关于 x 和 y 的线性回归方程可写为

$$z = a + bx + cy$$

由本章(21)式给出的正规方程为

$$\begin{aligned}\sum z &= na + b\sum x + c\sum y \\ \sum xz &= a\sum x + b\sum x^2 + c\sum xy \\ \sum yz &= a\sum y + b\sum xy + c\sum y^2\end{aligned} \tag{1}$$

计算这些和式的工作列在表 8-12 中.

表 8-12

z	x	y	z^2	x^2	y^2	xz	yz	xy
64	57	8	4096	3249	64	3648	512	456
71	59	10	5041	3481	100	4189	710	590
53	49	6	2809	2401	36	2597	318	294
67	62	11	4489	3844	121	4154	737	682
55	51	8	3025	2601	64	2805	440	408
58	50	7	3364	2500	49	2900	406	350
77	55	10	5929	3025	100	4235	770	550
57	48	9	3249	2304	81	2736	513	432
56	52	10	3136	2704	100	2912	560	520
51	42	6	2601	1764	36	2142	306	252
76	61	12	5776	3721	144	4636	912	732
68	57	9	4624	3249	81	3876	612	513
$\sum z =$ 753	$\sum x =$ 643	$\sum y =$ 106	$\sum z^2 =$ 48 139	$\sum x^2 =$ 34 843	$\sum y^2 =$ 976	$\sum xz =$ 40 830	$\sum yz =$ 6796	$\sum xy =$ 5779

利用此表,正规方程(1)变成

$$\begin{aligned}12a + 643b + 106c &= 753 \\ 643a + 34\ 843b + 5779c &= 40\ 830 \\ 106a + 5779b + 976c &= 6796\end{aligned} \tag{2}$$

解得 $a = 3.6512$, $b = 0.8546$, $c = 1.5063$,所求的回归方程为

$$z = 3.65 + 0.855x + 1.506y \tag{3}$$

(b)使用回归方程(3),代入对应的 x, y 值可获得 z 的估计,记为 z_{est}.表 8-13 将这些值和 z 的样本值列在一起.

表 8-13

z_{est}	64.414	69.136	54.564	73.206	59.286	56.925	65.717	58.229	63.153	48.582	73.857	65.920
z	64	71	53	67	55	58	77	57	56	51	76	68

(c)在(3)中令 $x = 54$, $y = 9$,则估计出的重量是 $z_{est} = 63.356$ 或归整为 63 磅.

估计的标准误差

8.20　如果 y 关于 x 的最小二乘回归直线给定为 $y=a+bx$，证明估计的标准误差 $s_{y.x}$ 为

$$s_{y.x}^2=\frac{\sum y^2-a\sum y-b\sum xy}{n}$$

证明　☞ 从回归直线估出的 y 值为 $y_{est}=a+bx$，那么

$$s_{y.x}^2=\frac{\sum(y-y_{est})^2}{n}=\frac{\sum(y-a-bx)^2}{n}$$

$$=\frac{\sum y(y-a-bx)-a\sum(y-a-bx)-b\sum x(y-a-bx)}{n}$$

但是

$$\sum(y-a-bx)=\sum y-an-b\sum x=0$$

$$\sum x(y-a-bx)=\sum xy-a\sum x-b\sum x^2=0$$

从正规方程有

$$\sum y=an+b\sum x,\qquad \sum xy=a\sum x+b\sum x^2$$

那么

$$s_{y.x}^2=\frac{\sum y(y-a-bx)}{n}=\frac{\sum y^2-a\sum y-b\sum xy}{n}$$

以上结果能够推扩到非线性回归方程.

8.21　证明习题 8.20 中的结果可写成

$$s_{y.x}^2=\frac{\sum(y-\bar{y})^2-b\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$$

证明　☞ **方法 1**　设 $x=x'+\bar{x}$，$y=y'+\bar{y}$，那么从习题 8.20，有

$$\begin{aligned}
ns_{y.x}^2&=\sum y^2-a\sum y-b\sum xy\\
&=\sum(y'+\bar{y})^2-a\sum(y'+\bar{y})-b\sum(x'+\bar{x})(y'+\bar{y})\\
&=\sum(y'^2+2y'\bar{y}+\bar{y}^2)-a\left(\sum y'+n\bar{y}\right)-b\sum(x'y'+\bar{x}y'+x'\bar{y}+\bar{x}\bar{y})\\
&=\sum y'^2+2\bar{y}\sum y'+n\bar{y}^2-an\bar{y}-b\sum x'y'-b\bar{x}\sum y'-b\bar{y}\sum x'-bn\bar{x}\bar{y}\\
&=\sum y'^2+n\bar{y}^2-an\bar{y}-b\sum x'y'-bn\bar{x}\bar{y}\\
&=\sum y'^2-b\sum x'y'+n\bar{y}(\bar{y}-a-b\bar{x})\\
&=\sum y'^2-b\sum x'y'\\
&=\sum(y-\bar{y})^2-b\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})
\end{aligned}$$

上式中使用了 $\sum x'=0$，$\sum y'=0$ 和 $\bar{y}=a+b\bar{x}$（这一结果来自用 n 除正规方程的两边）. 从而得所求的结果.

方法 2　我们知道回归方程可写成 $y-\bar{y}=b(x-\bar{x})$. 它对应于在直线 $y=a+bx$ 中用 $x-\bar{x}$ 替换 x，$y-\bar{y}$ 替换 y，再用 0 替换 a. 在习题 8.20 中做完这些替换后，立即可得所要的结果.

8.22　对习题 8.11 中的资料，计算估计的标准误差 $s_{y.x}$.

解　☞ 从习题 8.11(b)，y 关于 x 的回归直线为 $y=35.82+0.476x$. 表 8-14 列出了 y 的实测值（来自表 8-3）和 y 的回归直线估计值 y_{est}. 例如，对应 $x=65$，有 $y_{est}=35.82+0.476(65)=66.76$. 表中还列出了计算 $s_{y.x}$ 所需的 $y-y_{est}$. 故

$$s_{y.x}^2=\frac{\sum(y-y_{est})^2}{n}=\frac{(1.24)^2+(0.19)+\cdots+(0.38)^2}{12}=1.642$$

从而 $s_{y.x}=\sqrt{1.642}=1.28$ 英寸

表 8-14

x	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
y	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70
y_{est}	66.76	65.81	67.71	66.28	68.19	65.33	69.14	67.24	68.19	67.71	68.66	69.62
$y-y_{est}$	1.24	0.19	0.29	−1.28	0.81	0.67	−1.14	−2.24	2.81	−0.71	−0.66	0.38

8.23　(a)对习题 8.11 的回归直线，构造到它的纵轴距离为 $s_{y.x}$ 的两条平行直线.(b)确定落在此二直线间资料点的百分数.

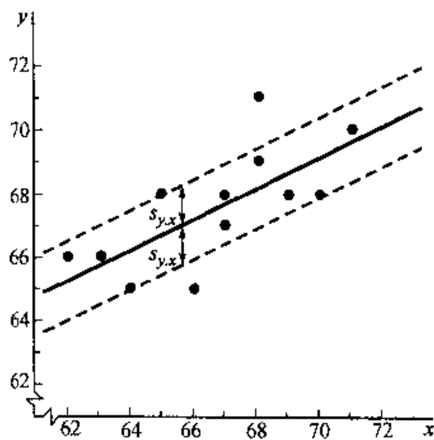


图 8-11

解　(a)在习题 8.11 中获得的回归线 $y=35.82+0.467x$ 用实线画在图 8-11 中，到它的纵轴距离为 $s_{y.x}=1.28$(见习题 8.22)的两条平行线用虚线画在图 8-11 中.

(b)从图中看，有 7 个点落在两线间，3 个点似乎落在线上，全部共 12 个点. 进一步使用表 8-14 的最后一行检查，3 个点中有 2 个点在两线之间，故所求的百分数是 9/12＝75%.

另解　从表 8-14 最后一行，在 −1.28 至 1.28 (也就是 $\pm s_{y.x}$)之间有 $y-y_{est}$ 的 9 个点. 那么所求的百分数为 9/12＝75%.

如果这些点关于回归线是正态分布的，理论预言大约有 68% 的在此二直线之间. 当样本量比较大时，一般会更接近这种状况.

注　根据总体的估计的标准误差的一个较好的估计，所取的样本身高的误差为

$$\hat{s}_{y.x}=\sqrt{n/(n-2)}\,s_{y.x}=\sqrt{12/10}(1.28)=1.40(\text{英寸})$$

线性相关系数

8.24　证明 $\sum(y-\overline{y})^2=\sum(y-y_{est})^2+\sum(y_{est}-\overline{y})^2$.

证明　对 $y-\overline{y}=(y-y_{est})+(y_{est}-\overline{y})$ 两边平方并求和，有

$$\sum(y-\overline{y})^2=\sum(y-y_{est})^2+\sum(y_{est}-\overline{y})^2+2\sum(y-y_{est})(y_{est}-\overline{y})$$

如果能说明最后一个和式为 0，则得所求结果. 在线性回归时，由于正规方程

$$\sum(y-a-bx)=0,\quad \sum x(y-a-bx)=0.$$

所以

$$\begin{aligned}\sum(y-y_{est})(y_{est}-\overline{y})&=\sum(y-a-bx)(a+bx-\overline{y})\\&=a\sum(y-a-bx)+b\sum x(y-a-bx)\\&\quad-\overline{y}\sum(y-a-bx)=0.\end{aligned}$$

对使用 $y_{est}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 作最小二乘曲线的非线性回归，能够类似地说明这一结果可以利用.

8.25　对习题 8.11 的资料，计算(a)可解释的变差，(b)不可解释的变差，(c)总变差.

解　从习题 8.12，我们有 $\overline{y}=67.58$(或从表 8-4)，从表 8-14，利用值 y_{est} 可得表 8-15.

表 8-15

$y_{est}-\overline{y}$	−0.82	−1.77	0.13	−1.30	0.61	−2.25	1.56	−0.34	0.61	0.13	1.08	2.04

(a)可解释变差 = $\sum(y_{est}-\overline{y})^2=(-0.82)^2+\cdots+(2.04)^2=19.22$.

(b) 从习题 8.22,不可解释的变差 = $\sum(y-y_{est})^2=ns_{y.x}^2=19.70$.

(c) 从习题 8.24,总变差 = $\sum(y-\overline{y})^2=19.22+19.70=38.92$.

也可直接计算平方和得到(b)和(c)中的结果.

8.26 对习题 8.11 的资料,使用习题 8.25 的结果,求(a)测定系数,(b)相关系数.

解 ☞ (a)测定系数 $=r^2=\dfrac{\text{可解释的变差}}{\text{总变差}}=\dfrac{19.22}{38.92}=0.4938$

(b)相关系数 $=r=\pm\sqrt{0.4938}=\pm0.7027$

由于变量 y_{est}随着 x 的增大而增大,相关系数为正,因此有 $r=0.7027$,或者取二位有效数字为 0.70.

8.27 在线性回归的情形,对相关系数,从本章(30)式一般的结果导出本章(34)式的结果(乘积矩公式).

解 ☞ y 关于 x 的最小二乘直线可写成 $y_{est}=a+bx$,或 $y'_{est}=bx'$,这里 $b=\sum x'y'/\sum x'^2$, $x'=x-\overline{x}$, $y'=y-\overline{y}$.那么,利用 $y'=y-\overline{y}$,有

$$r^2=\frac{\text{可解释的变差}}{\text{总变差}}=\frac{\sum(y_{est}-\overline{y})^2}{\sum(y-\overline{y})^2}=\frac{\sum y'^2_{est}}{\sum y'^2}$$

$$=\frac{\sum b^2x'^2}{\sum y'^2}=\frac{b^2\sum x'^2}{\sum y'^2}=\left(\frac{\sum x'y'}{\sum x'^2}\right)^2\left(\frac{\sum x'^2}{\sum y'^2}\right)=\frac{\left(\sum x'y'\right)^2}{\sum x'^2\sum y'^2}$$

所以

$$r=\pm\frac{\sum x'y'}{\sqrt{\sum x'^2\sum y'^2}}$$

然而,当 y_{est}随着 x 增大而增大时,$\sum x'y'$ 是正的,而当 y_{est} 随着 x 增大而减小时为负,r 的表达式会自动地有一个与其相连的正确符号.因此获得所求的结果.

8.28 使用乘积矩的公式,求习题 8.11 的资料的线性相关系数.

解 ☞ 计算工作可安排成表 8-16,那么会与习题 8.26(b)一致,得

$$r=\frac{\sum x'y'}{\sqrt{\left(\sum x'^2\right)\left(\sum y'^2\right)}}=\frac{40.34}{\sqrt{(84.68)(38.92)}}=0.7027$$

表 8-16

x	y	$x'=x-\overline{x}$	$y'=y-\overline{y}$	x'^2	$x'y'$	y'^2
65	68	−1.7	0.4	2.89	0.68	0.16
63	66	−3.7	−1.6	13.69	5.92	2.56
67	68	0.3	0.4	0.09	0.12	0.16
64	65	−2.7	−2.6	7.29	7.02	6.76
68	69	1.3	1.4	1.69	1.82	1.96
62	66	−4.7	−1.6	22.09	7.52	2.56
70	68	3.3	0.4	10.89	1.32	0.16
66	65	−0.07	−2.6	0.49	1.82	6.76
68	71	1.3	3.4	1.69	4.42	11.56
67	67	0.3	−0.6	0.09	−0.18	0.36
69	68	2.3	0.4	5.29	0.92	0.16
71	70	4.3	2.4	18.49	10.32	5.76
$\sum x=800$ $\overline{x}=800/12$ $=66.7$	$\sum y=811$ $\overline{y}=811/12$ $=67.6$			$\sum x'^2=$ 84.68	$\sum x'y'=$ 40.34	$\sum y'^2=$ 38.92

8.29 证明本章(17)式的结果.

证明 ☞ y 关于 x 的回归直线为

$$y = a + bx, \quad 这里 \quad b = \frac{rs_y}{s_x}$$

类似地,x 关于 y 的回归直线为

$$x = c + dy, \quad 这里\ d = \frac{rs_x}{s_y}$$

那么

$$bd = \left(\frac{rs_y}{s_x}\right)\left(\frac{rs_x}{s_y}\right) = r^2$$

8.30 使用习题 8.29 的结果,求习题 8.11 资料的线性相关系数.

证明 ☞ 从习题 8.11(b)和 8.11(c),有

$$b = \frac{484}{1016} = 0.476, \qquad d = \frac{484}{467} = 1.036$$

那么

$$r^2 = bd = \left(\frac{484}{1016}\right)\left(\frac{484}{467}\right) \quad 或 \quad r = 0.7027$$

这与习题 8.26(b)和习题 8.28 一致.

8.31 说明线性相关系数为

$$r = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{\left[n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right]\left[n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right]}}$$

证明 ☞ 在习题 8.27 中,已显示

$$(1) \qquad r = \frac{\sum x'y'}{\sqrt{\left(\sum x'^2\right)\left(\sum y'^2\right)}} = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\left[\sum (x-\bar{x})^2\right]\left[\sum (y-\bar{y})^2\right]}}$$

但是,由 $\bar{x} = \sum x/n$ 和 $\bar{y} = \sum y/n$

$$\begin{aligned}\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y}) &= \sum (xy - \bar{x}y - x\bar{y} + \bar{x}\bar{y}) \\ &= \sum xy - \bar{x}\sum y - \bar{y}\sum x + n\bar{x}\bar{y} \\ &= \sum xy - n\bar{x}\bar{y} - n\bar{y}\bar{x} + n\bar{x}\bar{y} = \sum xy - n\bar{x}\bar{y} \\ &= \sum xy - \frac{\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n}\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}\sum (x-\bar{x})^2 &= \sum (x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum x^2 - 2\bar{x}\sum x + n\bar{x}^2 \\ &= \sum x^2 - \frac{2\left(\sum x\right)^2}{n} + \frac{\left(\sum x\right)^2}{n} = \sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}\end{aligned}$$

$$\sum (y-\bar{y})^2 = \sum y^2 - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n}$$

那么,(1)变成

$$\begin{aligned}r &= \frac{\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)/n}{\sqrt{\left[\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2/n\right]\left[\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2/n\right]}} \\ &= \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{\left[n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right]\left[n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right]}}\end{aligned}$$

8.32 使用习题 8.31 的公式,求习题 8.11 资料的线性相关系数.

解 ☞ 从表 8-4,有

$$r=\frac{n\sum xy-\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{\left[n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2\right]\left[n\sum y^2-\left(\sum y\right)^2\right]}}$$

$$=\frac{12\times 54\,107-800\times 811}{\sqrt{(12\times 53\,418-800^2)(12\times 54\,849-811^2)}}=0.7027$$

和习题 8.26(b), 8.28 及 8.30 一样.

广义相关系数

8.33 (a)求习题 8.16 的变量 x 和 y 间的线性相关系数, (b)假定习题 8.16 中获得了抛物线关系, 求变量间的非线性相关系数, (c)解释在(a)和(b)中获得的相关系数间的差异, (d)假定 x 和 y 间是抛物线关系, 不可解释的变差是总变差的百分之几?

解 ☞ (a)利用表 8-9 进行计算, 并注意 $\sum y^2=290.52$, 得到

$$r=\frac{n\sum xy-\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{\left[n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2\right]\left[n\sum y^2-\left(\sum y\right)^2\right]}}$$

$$=\frac{8\times 230.42-42.2\times 46.4}{\sqrt{(8\times 291.20-42.2^2)(8\times 290.52-46.4^2)}}=-0.3743$$

(b)从表 8-9, $\bar{y}=\left(\sum y\right)/n=(46.4)/8=5.80$, 故

$$总变差=\sum(y-\bar{y})^2=21.40$$

从表 8-10,

$$可解释的变差=\sum(y_{est}-\bar{y})^2=21.02$$

因此

$$r^2=\frac{可解释的变差}{总变差}=\frac{21.02}{21.40}=0.9822\quad 或\quad r=0.9911$$

(c)在(a)中显示线性相关系数仅为 −0.3743, 这指明 x 和 y 间实际上不是线性关系. 然而存在用习题 8.16 的抛物线提供的很好的非线性关系. 事实上, 如(b)中所指示的这样的相关系数非常接近 1.

(d)
$$\frac{不可解释的变差}{总变差}=1-r^2=1-0.9822=0.0178$$

因此总变差的 1.78% 是不可解释的. 这可能是随机影响或其他尚未考虑到的变量.

8.34 对习题 8.16 的资料, 求(a)s_y 和(b)$s_{y.x}$.

解 ☞ (a)从习题 8.33(b), $\sum(y-\bar{y})^2=21.40$, 故 y 的标准差为

$$s_y=\sqrt{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n}}=\sqrt{\frac{21.40}{8}}=1.636\quad 或\quad 1.64$$

(b)**方法 1**　由(a)和习题 8.33(b), y 关于 x 的估计的标准误差为

$$s_{y.x}=s_y\sqrt{1-r^2}=1.636\sqrt{1-0.9911^2}=0.218\quad 或\quad 0.22$$

方法 2　由习题 8.33, 有

$$s_{y.x}=\sqrt{\frac{\sum(y-y_{est})^2}{n}}=\sqrt{\frac{不可解释的变差}{n}}=\sqrt{\frac{21.40-21.02}{8}}=0.218 或 0.22$$

方法 3　由习题 8.16, 另外算出 $\sum y^2=290.52$, 则

$$s_{y.x}=\sqrt{\frac{\sum y^2-a\sum y-b\sum xy-c\sum x^2y}{n}}=0.218\quad 或\quad 0.22$$

8.35 说明你如何确定习题 8.19 中的多变量的复相关系数.

解 ☞ 由于 z 是从 x 和 y 确定的, 我们对 z 关于 x 和 y 的复相关系数感兴趣. 为此从习题 8.19 看到:

$$不可解释的变差=\sum(z-z_{est})^2$$

$$=(64-64.414)^2+\cdots+(68-65.920)^2=258.88$$

$$总变差 = \sum(z-\bar{z})^2 = \sum z^2 - n\bar{z}^2$$
$$= 48\ 139 - 12 \times 62.75^2 = 888.25$$
$$可解释的变差 = 888.25 - 258.88 = 629.37$$

那么，z 关于 x 和 y 的复相关系数为

$$\sqrt{\frac{可解释的变差}{总变差}} = \sqrt{\frac{629.37}{888.25}} = 0.8418$$

应该记住，如果考虑的是 x 关于 y 和 z 的回归，x 关于 y 和 z 的复相关系数一般与上述值不相同.

秩相关

8.36 导出本章(36)式的斯皮尔曼秩相关公式.

解 ☞ 这里我们考虑 n 个 x 值(例如体重)和相应的 n 个 y 值(例如身高). 设 x_j 是第 j 个 x 值对应的秩，y_j 是第 j 个 y 值对应的秩. 这些秩是从整数 1 到 n. 那么 x_j 的平均为

$$\bar{x} = \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n(n+1)/2}{n} = \frac{n+1}{2}$$

同时，方差为

$$s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)/6}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{n^2-1}{12}$$

其中用到附录 A 的结果 1 和 2. 类似地，均值 $\bar{y}$ 和方差 s_y^2 分别为 $(n+1)/2$ 和 $(n^2-1)/12$.

现在如果 $d_j = x_j - y_j$ 是秩间的偏差，用 s_x^2，s_y^2 和秩间相关系数项给出的偏差的方差为

$$s_d^2 = s_x^2 + s_y^2 - 2r_{秩}s_xs_y$$

那么

$$r_{秩} = \frac{s_x^2 + s_y^2 - s_d^2}{2s_xs_y} \tag{1}$$

由于 $\bar{d} = 0$，$s_d^2 = \left(\sum d^2\right)/n$，(1) 式变成

$$r_{秩} = \frac{(n^2-1)/12 + (n^2-1)/12 - \left(\sum d^2\right)/n}{(n^2-1)/6} = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)} \tag{2}$$

8.37 表 8-17 列出了 10 个学生在一门生物课程中，实验和课堂成绩排出的秩，求秩相关系数.

表 8-17

实验	8	3	9	2	7	10	4	6	1	5
课堂	9	5	10	1	8	7	3	4	2	6

解 ☞ 每一学生实验和课堂的秩的差列在表 8-18 中，表中也给出了 d^2 和 $\sum d^2$.

表 8-18

秩的差 d	−1	−2	−1	1	−1	3	1	2	−1	−1	
d^2	1	4	1	1	1	9	1	4	1	1	$\sum d^2 = 24$

那么

$$r_{秩} = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 24}{10 \times (10^2-1)} = 0.8545$$

这指明实验和课堂成绩间存在值得注意的关系.

8.38 计算习题 8.11 资料的秩相关系数,并将你的结果与其他方法获得的相关系数进行比较.

解 ☞ 按量的升序排列,父亲的身高是

(1)　　62,63,64,65,66,67,67,68,68,69,70,71

由于在这个排列中第 6 个和第 7 个位置有相同的身高(67 英寸),对此二处设定平均秩 6.5.类似地,第 8 和第 9 位置设定秩 8.5.因此父亲身高设定的秩为

(2)　　1,2,3,4,5,6.5,6.5,8.5,8.5,10,11,12

类似地,儿子的身高按量的升序排为

(3)　　65,65,66,66,67,68,68,68,68,69,70,71

由于在第 6,第 7,第 8 和第 9 个位置有同样的身高(68 英寸),我们设定这几处为平均秩(6+7+8+9)/4=7.5.因此儿子身高设定的秩为

(4)　　1.5,1.5,3.5,3.5,5,7.5,7.5,7.5,7.5,10,11,12

使用(1)和(2),(3)和(4)的对应,表 8-3 变成表 8-19.秩间的差 d 和 d^2 及 $\sum d^2$ 列在表 8-20 中.那么

$$r_{秩} = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 72.50}{12 \times (12^2-1)} = 0.7465$$

此值和习题 8.26(b)中获得的值 $r=0.7027$ 吻合得相当好.

表 8-19

父亲的秩	4	2	6.5	3	8.5	1	11	5	8.5	6.5	10	12
儿子的秩	7.5	3.5	7.5	1.5	10	3.5	7.5	1.5	12	5	7.5	11

表 8-20

d	−3.5	−1.5	−1.0	1.5	−1.5	−2.5	3.5	3.5	−3.5	1.5	2.5	1.0	
d^2	12.25	2.25	1.00	2.25	2.25	6.25	12.25	12.25	12.25	2.25	6.25	1.00	$\sum d^2=72.50$

回归和相关的概率解释

8.39 从本章(37)式导出(39)式.

解 ☞ 假定回归方程为

$$y = E(Y \mid X = x) = \alpha + \beta x$$

对最小二乘回归直线我们必须考虑

$$\begin{aligned} E\{[Y-(\alpha+\beta X)]^2\} &= E\{[(Y-\mu_Y)-\beta(X-\mu_X)+(\mu_Y-\beta\mu_X-\alpha)]^2\} \\ &= E[(Y-\mu_Y)^2]+\beta^2 E[(X-\mu_X)^2] \\ &\quad -2\beta E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]+(\mu_Y-\beta\mu_X-\alpha)^2 \\ &= \sigma_Y^2+\beta^2\sigma_X^2-2\beta\sigma_{XY}+(\mu_Y-\beta\mu_X-\alpha)^2 \end{aligned}$$

上式中使用了

$$E(X-\mu_X)=0, \quad E(Y-\mu_Y)=0.$$

用 $F(\alpha,\beta)$ 记最后的那个表达式,有

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -2(\mu_Y - \beta\mu_X - \alpha), \qquad \frac{\partial F}{\partial \beta} = 2\beta\sigma_X^2 - 2\sigma_{XY} - 2\mu_X(\mu_Y - \beta\mu_X - \alpha)$$

令这些式子等于 0,这是使 $F(\alpha,\beta)$达最小的必要条件,则有

$$\mu_Y = \alpha + \beta\mu_X, \qquad \beta\sigma_X^2 = \sigma_{XY}$$

因此,如果 $y=\alpha+\beta x$,那么 $y-\mu_Y=\beta(x-\mu_X)$或

$$y - \mu_Y = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \mu_X)$$

或

$$\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} = \rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)$$

应该注意,上面对总体的证明中使用期望,相似于在对样本的证明中使用和号.一般,样本中的结果有类似的总体中的结果,反之亦然.

8.40 随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y), & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

求(a)Y 关于 X 的最小二乘回归曲线,(b)X 关于 Y 的最小二乘回归直线.

解 ☞ (a)X 的边缘密度为,当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,

$$f_1(x) = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)dy = \frac{2}{3}(x+1)$$

否则 $f_1(x)=0$.因此对 $0\leqslant x\leqslant 1$,给定 X 时 Y 的条件密度为

$$f_2(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{x+2y}{x+1}, & 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & y < 0 \text{ 或 } y > 1 \end{cases}$$

而 Y 关于 X 的最小二乘回归曲线为

$$y = E(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y \mid x)dy$$

$$= \int_0^1 y\left(\frac{x+2y}{x+1}\right)dy = \frac{3x+4}{6x+6}$$

当 $x<0$ 或 $x>1$ 时 $f_2(y|x)$和最小二乘回归曲线均没有定义.

(b)对 $0\leqslant y\leqslant 1$, y 的边缘密度为

$$f_2(y) = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)dx = \frac{1}{3}(1+4y)$$

因此,当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时,给定 Y 时 X 的条件密度为

$$f_1(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \frac{2x+4y}{1+4y}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & x < 0 \text{ 或 } x > 1 \end{cases}$$

而 X 关于 Y 的最小二乘回归曲线为

$$x = E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x \mid y)dx$$

$$= \int_0^1 x\left(\frac{2x+4y}{1+4y}\right)dx = \frac{2+6y}{3+12y}$$

当 $y<0$ 或 $y>1$ 时 $f_1(x|y)$和最小二乘回归曲线均没有定义.

两条回归曲线 $y=(3x+4)/(6x+6)$与 $x=(2+6y)/(3+12y)$是不一样的.

8.41 对习题 8.40 的分布,求(a)$\overline{X}$,(b)$\overline{Y}$,(c)σ_X^2,(d)σ_Y^2,(e)σ_{XY},(f)ρ.

解 ☞ (a)
$$\overline{X} = \int_{x=0}^1\int_{y=0}^1 x\left[\frac{2}{3}(x+2y)\right]dx\,dy = \frac{5}{9}$$

(b)
$$\overline{Y} = \int_{x=0}^1\int_{y=0}^1 y\left[\frac{2}{3}(x+2y)\right]dx\,dy = \frac{11}{18}$$

(c)
$$\overline{X^2} = \int_{x=0}^1\int_{y=0}^1 x^2\left[\frac{2}{3}(x+2y)\right]dx\,dy = \frac{7}{18}$$

那么 $$\sigma_X^2=\overline{X^2}-\overline{X}^2=\frac{7}{18}-\left(\frac{5}{9}\right)^2=\frac{13}{162}$$

(d) $$\overline{Y^2}=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}y^2\left[\frac{2}{3}(x+2y)\right]dx\,dy=\frac{4}{9}$$

那么 $$\sigma_Y^2=\overline{Y^2}-\overline{Y}^2=\frac{4}{9}-\left(\frac{11}{18}\right)^2=\frac{23}{324}$$

(e) $$\overline{XY}=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}xy\left[\frac{2}{3}(x+2y)\right]dx\,dy=\frac{1}{3}$$

那么 $$\sigma_{XY}=\overline{XY}-\overline{X}\,\overline{Y}=\frac{1}{3}-\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{11}{18}\right)=-\frac{1}{162}$$

(f) $$\rho=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{-1/162}{\sqrt{13/162}\,\sqrt{23/324}}=-0.0818$$

可以看到线性相关系数很小，从习题 8.42 获得的最小二乘回归直线，可以预期到这一情况.

8.42 对习题 8.40，写出(a) Y 关于 X 的最小二乘回归直线，(b) X 关于 Y 的最小二乘回归直线.

解 ☞ (a) Y 关于 X 的回归直线是

$$\frac{y-\overline{Y}}{\sigma_Y}=\rho\left(\frac{x-\overline{X}}{\sigma_X}\right)\text{或}\quad y-\overline{Y}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x-\overline{X})\quad\text{或}\quad y-\frac{11}{18}=\frac{-1/162}{13/162}\left(x-\frac{5}{9}\right)$$

(b) X 关于 Y 的回归直线是

$$\frac{x-\overline{X}}{\sigma_X}=\rho\left(\frac{y-\overline{Y}}{\sigma_Y}\right)\text{或}\quad x-\overline{X}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}(y-\overline{Y})\quad\text{或}\quad x-\frac{5}{9}=\frac{-1/162}{23/324}\left(y-\frac{11}{18}\right)$$

回归的抽样理论

8.43 在习题 8.11 中，我们得到 y 关于 x 的回归方程 $y=35.82+0.476x$. 在 0.05 显著性水平检验假设：总体回归方程的回归系数小于 0.180.

解 ☞ $$t=\frac{\beta-b}{s_{y.x}/s_x}\sqrt{n-2}=\frac{0.476-0.180}{1.28/2.66}\sqrt{12-2}=1.95$$

由于 $s_{y.x}=1.28$(在习题 8.22 中算得)，而从习题 8.11 有 $s_x=\sqrt{\overline{x^2}-\overline{x}^2}=2.66$.

基于 0.05 水平的单侧学生氏分布的检验，当 $t>t_{0.95}=1.81$(自由度为 $12-2=10$)，应拒绝回归系数小于 0.180 的假设. 因此，我们能拒绝原假设.

8.44 对习题 8.43 的回归系数，求 95% 置信限.

解 ☞ $$\beta=b+\frac{t}{\sqrt{n-2}}\left(\frac{s_{y.x}}{s_x}\right)$$

β 的 95% 置信限为(对自由度为 $12-2=10$，用 $t=\pm t_{0.975}=\pm 2.23$ 获得)

$$b\pm\frac{2.23}{\sqrt{12-2}}\left(\frac{s_{y.x}}{s_x}\right)=0.476\pm\frac{2.23}{\sqrt{10}}\left(\frac{1.28}{2.66}\right)=0.476\pm 0.340$$

也就是以 95% 的置信度 β 落在 0.136 和 0.816 之间.

8.45 在习题 8.11 中，当父亲身高为下列值时，求儿子身高的 95% 置信限，(a) 65.0 英寸，(b) 70.0 英寸.

解 ☞ 由于对自由度 $12-2=10$，$t_{0.975}=2.23$，y_p 的 95% 置信限为

$$y_0\pm\frac{2.23}{\sqrt{n-2}}s_{y.x}\sqrt{n+1+\frac{n(x_0-\overline{x})^2}{s_x^2}}$$

其中 $y_0=35.82+0.476x_0$(习题 8.11)，$s_{y.x}=1.28$，$s_x=2.66$(习题 8.43)，$n=12$.

(a) 如果 $x_0=65.0$，则 $y_0=66.76$ 英寸，且 $(x_0-\overline{x})^2=(65.0-800/12)^2=2.78$，那么 95% 置信限为

$$66.76\pm\frac{2.23}{\sqrt{10}}\times 1.28\times\sqrt{12+1+\frac{12\times 2.78}{2.66^2}}=66.76\pm 3.80\text{英寸}$$

也就是能以 95% 的置信度儿子的身高落在 63.0 和 67.0 英寸之间.

(b) 如果 $x_0=70.0$，则 $y_0=69.14$ 英寸，且 $(x_0-\overline{x})^2=(70.0-800/12)^2=11.11$，那么算得 95% 置信限是 69.14 ± 5.09 英寸，即以 95% 的置信度儿子的身高落在 64.1 和 74.2 英寸之间.

注意，对比较大的 n 值，当 $(x_0-\overline{x})$ 不太大时，95% 的置信限近似为 $y_0\pm 1.96s_{y.x}$ 或 $y_0\pm 2s_{y.x}$. 这

和本章前面提到的近似结果是一致的.

解这个问题的方法不须考虑 n 的大小或 $x_0-\bar{x}$,即该抽样理论方法对正态分布是精确的.

8.46 在习题 8.11 中,当父亲的身高是下列值时,求儿子身高平均值的 95% 置信限,(a)65.0 英寸,(b)70.0 英寸.

解 ☞ 由于自由度为 10 时 $t_{0.975}=2.23$, $\bar{y}_p$ 的 95% 置信限为

$$y_0 \pm \frac{2.23}{\sqrt{10}} s_{y.x} \sqrt{1+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{s_x^2}}$$

其中 $y_0=35.82+0.476x_0$(习题 8.11), $s_{y.x}=1.28$(习题 8.43).

(a)如果 $x_0=65.0$,我们求得 95% 置信限为 66.76 ± 1.07 英寸(与问题 8.45(a)比较).也就是说,当父亲身高为 65.0 英寸时,全部儿子的平均身高以 95% 的置信度落在 65.7 和 67.8 英寸之间.

(b)如果 $x_0=70.0$,我们求得 95% 置信限为 69.14 ± 1.45 英寸(与习题 8.45(b)比较),也就是说,当父亲身高为 70.0 英寸时,全部儿子的平均身高以 95% 的置信度落在 67.7 和 70.6 英寸之间.

相关的抽样理论

8.47 一个大小为 18 的样本,计算得一个相关系数为 0.32,在(a)0.05,(b)0.01 显著性水平下,我们能认为对应的总体相关系数显著地大于 0 吗?

解 ☞ 我们要决策的假设为 $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho>0$

$$t=\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}=\frac{0.32\sqrt{18-2}}{\sqrt{1-(0.32)^2}}=1.35$$

(a)根据 0.05 水平的单侧学生氏分布检验,对自由度为 $18-2=16$ 时,当 $t>t_{0.95}=1.75$ 时,拒绝 H_0.因此在 0.05 水平我们不能拒绝 H_0.

(b)由于在 0.05 水平不能拒绝 H_0,在 0.01 水平肯定不能拒绝 H_0.

8.48 一个相关系数为 0.32,为了在 0.05 水平下能认为它显著大于 0,我们最少需多少样本量?

解 ☞ 在 0.05 水平用单侧学生氏分布检验,n 的最小值必须满足:

$$\frac{0.32\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(0.32)^2}}=t_{0.95}$$

其中自由度为 $n-2$.

当 $n=26$, $\nu=24$, $t_{0.95}=1.71$, $t=0.32\sqrt{24}/\sqrt{1-(0.32)^2}=1.65$.

当 $n=27$, $\nu=25$, $t_{0.95}=1.71$, $t=0.32\sqrt{25}/\sqrt{1-(0.32)^2}=1.69$.

当 $n=28$, $\nu=26$, $t_{0.95}=1.71$, $t=0.32\sqrt{26}/\sqrt{1-(0.32)^2}=1.72$.

那么最小样本量 $n=28$.

8.49 从一个样本量为 24 的样本,计算得一个相关系数为 $r=0.75$.能否在 0.05 显著性水平下拒绝假设:(a)总体相关系数小于 $\rho=0.60$,(b)小于 $\rho=0.50$.

解 ☞ (a) $Z=1.1513\log\left(\frac{1+0.75}{1-0.75}\right)=0.9730$, $\mu_Z=1.1513\log\left(\frac{1+0.60}{1-0.60}\right)=0.6932$,

$$\sigma_Z=\frac{1}{\sqrt{n-3}}=\frac{1}{\sqrt{21}}=0.2182$$

标准化的变量是

$$z=\frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z}=\frac{0.9730-0.6932}{0.2182}=1.28$$

在 0.05 水平用单侧正态分布检验,仅当 z 大小 1.64 时拒绝假设.因此我们不能拒绝假设:总体相关系数小于 0.60.

(b)如果 $\rho=0.50$, $\mu_Z=1.1513\log3=0.5493$, $z=(0.9730-0.5493)/0.2182=1.94$.因此在 0.05 显著性水平,我们能拒绝总体相关系数小于 0.50 的假设.

8.50 算得一群 21 个学生的物理和数学期终成绩的相关系数为 0.80.求这一相关的 95% 置

信限.

解 ☞ 由于 $r=0.80, n=21$, Z 的 95% 置信限为

$$Z \pm 1.96\sigma_Z = 1.1513\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \pm 1.96\left(\frac{1}{\sqrt{n-3}}\right) = 1.0986 \pm 0.4620$$

那么 μ_Z 有 95% 置信区间 0.5366 至 1.5606.

如果 $\mu_Z = 1.1513\log\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) = 0.5366$, $\rho = 0.4904$.

如果 $\mu_Z = 1.1513\log\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) = 1.5606$, $\rho = 0.9155$.

因此,ρ 的 95% 置信限为 0.49 至 0.92.

8.51 从样本量为 $n_1=28$ 和 $n_2=35$ 的两个样本中分别算得两个相关系数 $r_1=0.50$ 和 $r_2=0.30$.两个系数在 0.05 水平下是否存在显著差异?

解 ☞ $Z_1 = 1.1513\log\left(\frac{1+r_1}{1-r_1}\right) = 0.5493$, $Z_2 = 1.1513\log\left(\frac{1+r_2}{1-r_2}\right) = 0.3095$

$$\sigma_{Z_1-Z_2} = \sqrt{\frac{1}{n_1-3}+\frac{1}{n_2-3}} = 0.2669$$

我们要在假设($H_0: \mu_{Z_1} = \mu_{Z_2}$)和($H_1: \mu_{Z_1} \neq \mu_{Z_2}$)间作出决策.在假设 H_0 下,

$$z = \frac{Z_1 - Z_2 - (\mu_{Z_1} - \mu_{Z_2})}{\sigma_{Z_1-Z_2}} = \frac{0.5493 - 0.3095 - 0}{0.2669} = 0.8985$$

使用双侧正态分布检验,仅当 $z > 1.96$ 或 $z < -1.96$ 时,拒绝 H_0.因此不能拒绝 H_0,认为在 0.05 水平下两者没有显著差异.

综合问题

8.52 证明本章公式(25)式.

证明 ☞ 从习题 8.20 和 8.21,对最小二乘直线有

$$s_{y.x}^2 = \frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n} - b\,\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$$

且按定义

$$\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n} = s_y^2, \qquad \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} = s_{xy}$$

并由本章(6)式

$$b = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

因此

$$s_{y.x}^2 = s_y^2 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2} = s_y^2\left[1 - \left(\frac{s_{xy}}{s_x s_y}\right)^2\right] = s_y^2(1-r^2)$$

对总体也有类似的公式(见习题 8.54).

8.53 对下列情形证明 $E[(Y-\overline{Y})^2] = E[(Y-Y_{est})^2] + E[(Y_{est}-\overline{Y})^2]$,(a)最小二乘直线,(b)最小二乘抛物线.

证明 ☞ 我们有

$$Y - \overline{Y} = (Y - Y_{est}) + (Y_{est} - \overline{Y})$$

那么

$$(Y-\overline{Y})^2 = (Y-Y_{est})^2 + (Y_{est}-\overline{Y})^2 + 2(Y-Y_{est})(Y_{est}-\overline{Y})$$

从而

$$E[(Y-\overline{Y})^2] = E[(Y-Y_{est})^2] + E[(Y_{est}-\overline{Y})^2] + 2E[(Y-Y_{est})(Y_{est}-\overline{Y})]$$

如果能说明最后一项是零,立即得所求结果.

(a)对线性回归 $Y_{est} = \alpha + \beta X$.那么由于正规方程

$$E(Y-\alpha-\beta X)=0,\qquad E(XY-\alpha X-\beta X^2)=0$$

(比较习题 8.3),故有

$$\begin{aligned}E[(Y-Y_{est})(Y_{est}-\overline{Y})]&=E[(Y-\alpha-\beta X)(\alpha+\beta X-\overline{Y})]\\&=(\alpha-\overline{Y})E(Y-\alpha-\beta X)+\beta E(XY-\alpha X-\beta X^2)\\&=0\end{aligned}$$

(b)对抛物线回归 $Y_{est}=\alpha+\beta X+\gamma X^2$,由于正规方程

$$E(Y-\alpha-\beta X-\gamma X^2)=0,\quad E[X(Y-\alpha-\beta X-\gamma X^2)]=0,\quad E[X^2(Y-\alpha-\beta X-\gamma X^2)]=0$$

(比较本章(9)式),故有

$$\begin{aligned}E[(Y-Y_{est})(Y_{est}-\overline{Y})]&=E[(Y-\alpha-\beta X-\gamma X^2)(\alpha+\beta X+\gamma X^2-\overline{Y})]\\&=(\alpha-\overline{Y})E(Y-\alpha-\beta X-\gamma X^2)+\beta E[X(Y-\alpha-\beta X-\gamma X^2)]\\&\quad+\gamma E[X^2(Y-\alpha-\beta X-\gamma X^2)]\\&=0\end{aligned}$$

对高阶最小二乘曲线也有这一关系式.

8.54 对最小二乘回归证明 $\sigma^2_{Y.X}=\sigma^2_Y(1-\rho^2)$.

证明 ☞ 按广义相关系数 ρ 的定义,及习题 8.53,对直线和抛物线的两种情形,有

$$\rho^2=\frac{E[(Y_{est}-\overline{Y})^2]}{E[(Y-\overline{Y})^2]}=1-\frac{E[(Y-Y_{est})^2]}{E[(Y-\overline{Y})^2]}=1-\frac{\sigma^2_{Y.X}}{\sigma^2_Y}$$

从而立即得所求结果.

对高阶最小二乘曲线也有这一结果.

8.55 对线性回归,说明用本章(45)式定义的相关系数可化简成本章(40)式的定义.

解 ☞ 用(45)式给出的相关系数的平方,即测定系数在线性回归时为

$$\rho^2=\frac{E[(Y_{est}-\overline{Y})^2]}{E[(Y-\overline{Y})^2]}=\frac{E[(\alpha+\beta X-\overline{Y})^2]}{\sigma^2_Y}\tag{1}$$

但由于 $\overline{Y}=\alpha+\beta\overline{X}$,故

$$\begin{aligned}E[(\alpha+\beta X-\overline{Y})^2]&=E[\beta^2(X-\overline{X})^2]=\beta^2E[(X-\overline{X})^2]\\&=\frac{\sigma^2_{XY}}{\sigma^4_X}\sigma^2_X=\frac{\sigma^2_{XY}}{\sigma^2_X}\end{aligned}\tag{2}$$

那么(1)变成

$$\rho^2=\frac{\sigma^2_{XY}}{\sigma^2_X\sigma^2_Y}\quad 或\quad \rho=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}\tag{3}$$

这就说明了所求的结果(ρ 的符号已包括在 σ_{XY} 中).

8.56 见表 8-21,(a)求拟合资料的最小二乘抛物线,(b)对给定年份计算回归值(趋势值),并与实测值比较,(c)估计 1945 年的人口,(d)估计 1960 年的人口,并与真实值 179.3 比较,(e)估计 1840 年的人口,并与真实值 17.1 比较.

表 8-21

年	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
美国人口(百万)	23.2	31.4	39.8	50.2	62.9	76.0	92.0	105.7	122.8	131.7	151.1

资料来源于人口普查局

解 ☞ (a)设 x 和 y 分别记年和该年的人口数,拟合资料的最小二乘抛物线方程为

$$y=a+bx+cx^2\tag{1}$$

从下式给出的正规方程求 a,b,c,

$$\begin{aligned}\sum y&=an+b\sum x+c\sum x^2\\\sum xy&=a\sum x+b\sum x^2+c\sum x^3\\\sum x^2y&=a\sum x^2+b\sum x^3+c\sum x^4\end{aligned}\tag{2}$$

这等价于将中间年份 1900 定为原点，对应到 $x=0$，并选择一个单位使 1910，1920，1930，1940，1950 和 1890，1880，1870，1860，1850 分别对应到 1，2，3，4，5 和 -1，-2，-3，-4，-5. 在这样选择下，$\sum x$ 和 $\sum x^3$ 是零，并可简化方程(2).

具体的计算工作列在表 8-22 中，正规方程(2)成为

$$11a+110c=886.8$$
$$110b=1429.8 \quad (3)$$
$$110a+1958c=9209.0$$

从(3)中的第二个方程得 $b=13.00$，从第一个和第三个方程得 $a=76.64$，$c=0.3974$. 那么所求方程为

$$y=76.64+13.00x+0.3974x^2 \quad (4)$$

其中零点 $x=0$ 为 1900 年 7 月 1 日，x 的一个单位是 10 年.

表 8-22

年	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1850	−5	23.2	25	−125	625	−116.0	580.0
1860	−4	31.4	16	−64	256	−125.6	502.4
1870	−3	39.8	9	−27	81	−119.4	358.2
1880	−2	50.2	4	−8	16	−100.4	200.8
1890	−1	62.9	1	−1	1	−62.9	62.9
1900	0	76.0	0	0	0	0	0
1910	1	92.0	1	1	1	92.0	92.0
1920	2	105.7	4	8	16	211.4	422.8
1930	3	122.8	9	27	81	368.4	1105.2
1940	4	131.7	16	64	256	526.8	2107.2
1950	5	151.1	25	125	625	755.5	3777.5
	$\sum x=0$	$\sum y=$ 886.8	$\sum x^2=$ 110	$\sum x^3=0$	$\sum x^4=$ 1958	$\sum xy=$ 1429.8	$\sum x^2y=$ 9209.0

(b)在(4)中代入 $x=-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5$ 可获得回归值，表 8-23 列出了这些值，并列出了真实值. 可以看出一致性还是好的.

表 8-23

年	$x=-5$ 1850	$x=-4$ 1860	$x=-3$ 1870	$x=-2$ 1880	$x=-1$ 1890	$x=0$ 1900	$x=1$ 1910	$x=2$ 1920	$x=3$ 1930	$x=4$ 1940	$x=5$ 1950
回归值	21.6	31.0	41.2	52.2	64.0	76.6	90.0	104.2	119.2	135.0	151.6
真实值	23.2	31.4	39.8	50.2	62.9	76.0	92.0	105.7	122.8	131.7	151.1

(c)1945 对应 $x=4.5$，此时 $y=76.64+13.00(4.5)+0.3974(4.5)^2=143.2$.

(d)1960 对应 $x=6$，此时 $y=76.64+13.00(6)+0.3974(6)^2=168.9$. 这与 179.3 真值不太一致.

(e)1840 对应 $x=-6$，此时 $y=76.64+13.00(-6)+0.3974(-6)^2=12.9$. 这与 17.1 真值也不一致.

这个例子说明了一个事实：从满足一定范围的一些值中获得的关系，不一定满足一个扩展了的范围中的值.

8.57 表 8-24 列出了 1950 至 1959 年纽约股票交易所中股票和证券的平均价格，(a)求相关

系数,(b)对结果作出解释.

表 8-24

年	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
股票平均价格(美元)	35.22	39.87	41.85	43.23	40.06	53.29	54.14	49.12	40.71	55.15
证券平均价格(美元)	102.43	100.93	97.43	97.81	98.32	100.07	97.08	91.59	94.85	94.65

资料来自纽约股票交易所

解 (a)用 x 和 y 记股票和证券的平均价格.表 8-25 列出了相关系数的计算工作.年份仅用于指明 x 和 y 的对应.那么用乘积矩公式,有

$$r=\frac{\sum x'y'}{\sqrt{\left(\sum x'^2\right)\left(\sum y'^2\right)}}=\frac{-94.67}{\sqrt{449.38\times 93.69}}=-0.4614$$

表 8-25

x	y	$x'=x-\overline{x}$	$y'=y-\overline{y}$	x'^2	$x'y'$	y'^2
35.22	102.43	−10.04	4.91	100.80	−49.30	24.11
39.87	100.93	−5.39	3.41	29.05	−18.38	11.63
41.85	97.43	−3.41	−0.09	11.63	0.31	0.01
43.23	97.81	−2.03	0.29	4.12	−0.59	0.08
40.06	98.32	−5.20	0.80	27.04	−4.16	0.64
53.29	100.07	8.03	2.55	64.48	20.48	6.50
54.14	97.08	8.88	−0.44	78.85	−3.91	0.19
49.12	91.59	3.86	−5.93	14.90	−22.89	35.16
40.71	94.85	−4.55	−2.67	20.70	12.15	7.13
55.15	94.65	9.89	−2.87	97.81	−28.38	8.24
$\sum x=452.64$ $\overline{x}=45.26$	$\sum x=975.16$ $\overline{y}=97.52$			$\sum x'^2=$ 449.38	$\sum x'y'=$ −94.67	$\sum y'^2=$ 93.69

(b)我们认为股票和证券价格间存在一些负相关(即当证券价格上升时,股票价格倾向于下降,反之亦然),虽然这种关系不是很明显.

另解 表 8-26 列出了 1950 至 1959 年股票和证券平均价格按升序得出的秩,并列出秩间差 d 和 $\sum d^2$.那么

$$r_{秩}=1-\frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}=1-\frac{6\times 272}{10(10^2-1)}=-0.6485$$

这一结果和第一个方法的结果基本相符.

表 8-26

年	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	
股票价格的秩	1	2	5	6	3	8	9	7	4	10	
证券价格的秩	10	9	5	6	7	8	4	1	3	2	
秩间差 d	−9	−7	0	0	−4	0	5	6	1	8	
d^2	81	49	0	0	16	0	25	36	1	64	$\sum d^2=272$

8.58 表 8-27 列出了在数学和物理课中 100 个学生期终成绩的频数分布.用此表确定(a)在

数学中得到 70 至 79 分而在物理中得到 80 至 89 分的学生数，(b)数学成绩低于 70 分的学生的百分数，(c)在物理中成绩高于 70 分而在数学中成绩低于 80 分的学生数，(d)假定最少 60 分才能通过，至少通过一个科目的学生的百分数.

解 ☞ (a)从数学成绩为 70～79 的列向下到物理成绩为 80～89 的行，该单元小格给出了所求的学生数 4.

表 8-27

数 学 成 绩

		40～49	50～59	60～69	70～79	80～89	90～99	总数
	90～99				2	4	4	10
物	80～89			1	4	6	5	16
理	70～79			5	10	8	1	24
成	60～69	1	4	9	5	2		21
绩	50～59	3	6	6	2			17
	40～49	3	5	4				12
	总数	7	15	25	23	20	10	100

(b)数学成绩在 70 分以下的学生总数 = (40～49 的数) + (50～59 的数) + (60～69 的数)

$$= 7 + 15 + 25 = 47$$

数学成绩在 70 分以下的学生的百分数 = 47/100 = 47%

(c)所求的学生数是表 8-28 中各单元小格的总数，该表是表 8-27 的一部分.

所求的学生数 = 1 + 5 + 2 + 4 + 10 = 22

表 8-28

数 学 成 绩

		60～69	70～79
物理成绩	90～99		2
	80～89	1	4
	70～79	5	10

表 8-29

数 学 成 绩

		40～49	50～59
物理成绩	50～59	3	6
	40～49	3	5

(d)见表 8-29，该表取自表 8-27. 在数学和物理两个科目成绩均低于 60 分的学生数为 3 + 3 + 6 + 5 = 17. 那么，在物理或数学或两门科目中成绩超过 60 分的学生数为 100 − 17 = 83，所求百分数为 83/100 = 83%.

表 8-27 有时称为二元频数表或二元频数分布. 表中每一方格称为(单元)小格，对应于一对分类或分组区间. 小格中指示的数称为小格频数. 例如，在(a)中，数 4 是对应于数学分组区间为 70～79，物理分组区间为 80～89 这一对的小格.

最后一行和最后一列指示的总数称为边缘总数或边缘频数. 他们分别对应于数学和物理成绩的单个频数分布的各分组频数.

8.59 对习题 8.27 中那样的集群资料，如何修改习题 8.31 中的公式.

解 ☞ 对集群资料，我们可以考虑作为分类标志的变量 x 和 y 的各种值，同时 f_x 和 f_y 是对应的分类频数或边缘频数，二元频数表的最后一行和最后一列指出了这些数. 如果以 f 简省地表示与分类标志(x, y)对应各小格的频数，那么能将习题 8.31 的公式换成

$$(1)\qquad r = \frac{n\sum fxy - \left(\sum f_x x\right)\left(\sum f_y y\right)}{\sqrt{\left[n\sum f_x x^2 - \left(\sum f_x x\right)^2\right]\left[n\sum f_y y^2 - \left(\sum f_y y\right)^2\right]}}$$

如果令 $x = x_0 + c_x u_x$ 和 $y = y_0 + c_y u_y$，这里 c_x 和 c_y 是分组区间的宽度(假定为常数)，而 x_0 和 y_0

是对应于变量的一个分组标识，则上面公式变成

$$(2)\qquad r=\frac{n\sum fu_xu_y-\left(\sum f_xu_x\right)\left(\sum f_yu_y\right)}{\sqrt{\left[n\sum f_xu_x^2-\left(\sum f_xu_x\right)^2\right]\left[n\sum f_yu_y^2-\left(\sum f_yu_y\right)^2\right]}}$$

这是在第五章中用过的所谓代码方法，在那里用于简化计算均值、标准差或高阶矩．

8.60 求习题 8.58 中数学和物理成绩的线性相关系数．

解 ☞ 使用习题 8.59 的公式(2)，计算工作可安排成表 8-30，该表称为相关表．

每一小格的下角有一个数，表示乘积 fu_xu_y，这里 f 为小格的频数．在每一行中这些下角数的总和记录在最后一列的对应行处．每一列的这些下角数的总和记录在最后一行的对应列处．最后一行或最后一列的总和相等，表示为 $\sum fu_xu_y$．

表 8-30

数学成绩，x

物理成绩，y	x	44.5	54.5	64.5	74.5	84.5	94.5	f_y	f_yu_y	$f_yu_y^2$	每行下角数之和
y	u_y \ u_x	−2	−1	0	1	2	3				
94.5	2				2 [4]	4 [16]	4 [24]	10	20	40	44
84.5	1			1 [0]	4 [4]	6 [12]	5 [15]	16	16	16	31
74.5	0			5 [0]	10 [0]	8 [0]	1 [0]	24	0	0	0
64.5	−1	1 [2]	4 [4]	9 [0]	5 [−5]	2 [−4]		21	−21	21	−3
54.5	−2	3 [12]	6 [12]	6 [0]	2 [−4]			17	−34	68	20
44.5	−3	3 [18]	5 [15]	4 [0]				12	−36	108	33
f_x		7	15	25	23	20	10	$\sum f_x=\sum f_y=n=100$	$\sum f_yu_y=-55$	$\sum f_yu_y^2=253$	$\sum fu_xu_y=125$
f_xu_x		−14	−15	0	23	40	30	$\sum f_xu_x=64$			
$f_xu_x^2$		28	15	0	23	80	90	$\sum f_xu_x^2=236$	校验		
每列下角数之和		32	31	0	−1	24	39	$\sum fu_xu_y=125$			

从表 8-30，有

$$r=\frac{n\sum fu_xu_y-\left(\sum f_xu_x\right)\left(\sum f_yu_y\right)}{\sqrt{\left[n\sum f_xu_x^2-\left(\sum f_xu_x\right)^2\right]\left[n\sum f_yu_y^2-\left(\sum f_yu_y\right)^2\right]}}$$

$$=\frac{100\times125-64\times(-55)}{\sqrt{(100\times236-64^2)[100\times253-(-55)^2]}}=\frac{16\ 020}{\sqrt{19\ 504\times22\ 275}}=0.7686$$

8.61 用习题 8.60 中的相关表，计算(a) s_x，(b) s_y，(c) s_{xy}，且验证公式 $r=s_{xy}/s_xs_y$．

解 ☞ (a) $s_x=c_x\sqrt{\dfrac{\sum f_xu_x^2}{n}-\left(\dfrac{\sum f_xu_x}{n}\right)^2}=10\times\sqrt{\dfrac{236}{100}-\left(\dfrac{64}{100}\right)^2}=13.966$

(b) $s_y=c_y\sqrt{\dfrac{\sum f_yu_y^2}{n}-\left(\dfrac{\sum f_yu_y}{n}\right)^2}=10\times\sqrt{\dfrac{253}{100}-\left(\dfrac{-55}{100}\right)^2}=14.925$

(c)
$$s_{xy}=c_xc_y\left[\frac{\sum fu_xu_y}{n}-\left(\frac{\sum f_xu_x}{n}\right)\left(\frac{\sum f_yu_y}{n}\right)\right]$$
$$=10\times10\left[\frac{125}{100}-\frac{64}{100}\times\left(\frac{-55}{100}\right)\right]=160.20$$

因此数学和物理成绩的标准差分别为 14.0 和 14.9，它们的协方差为 160.2，有

$$\frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{160.20}{13.966 \times 14.925} = 0.7686$$

与习题 8.60 中求出的 r 一样.

8.62 对习题 8.60 的资料,写出(a)y 关于 x 的回归直线方程,(b)x 关于 y 的回归直线方程.

解 从表 8-30,有

$$\overline{x} = x_0 + c_x \frac{\sum f_x u_x}{n} = 64.5 + \frac{10 \times 64}{100} = 70.9$$

$$\overline{y} = y_0 + c_y \frac{\sum f_y u_y}{n} = 74.5 + \frac{10 \times (-55)}{100} = 69.0$$

利用习题 8.61 的结果 $s_x = 13.966$, $s_y = 14.925$ 和 $r = 0.7686$. 现在由本章(16)式,得回归直线方程

(a) $$y - \overline{y} = \frac{rs_y}{s_x}(x - \overline{x}),\ y - 69.0 = \frac{0.7686 \times 14.925}{13.966}(x - 70.9)$$

或

$$y - 69.0 = 0.821(x - 70.9)$$

(b) $$x - \overline{x} = \frac{rs_x}{s_y}(y - \overline{y}),\ y - 70.0 = \frac{0.7686 \times 13.966}{14.925}(y - 69.0)$$

或

$$x - 70.9 = 0.719(y - 69.0)$$

8.63 对习题 8.60 的资料,使用习题 8.61 的结果,计算估计的标准误差(a)$s_{y.x}$,(b)$s_{x.y}$.

解 (a) $$s_{y.x} = s_y\sqrt{1 - r^2} = 14.925 \times \sqrt{1 - 0.7686^2} = 9.548$$

(b) $$s_{x.y} = s_x\sqrt{1 - r^2} = 13.966 \times \sqrt{1 - 0.7686^2} = 8.934$$

补 充 习 题

最小二乘直线

8.64 对表 8-31 的资料拟合最小二乘直线,(a)使用 x 作独立变量,(b)使用 x 作相依变量. 用同一个坐标轴画出资料点和最小二乘直线.

表 8-31

x	3	5	6	8	9	11
y	2	3	4	6	5	8

8.65 对习题 8.64 的资料,求(a)当 $x = 5$ 和 $x = 12$ 时的 y 值,(b)当 $y = 7$ 时的 x 值.

8.66 从一大群学生中随机选取 10 名学生,表 8-32 列出了这些学生的代数和物理期终成绩. (a)画出资料图,(b)用 x 为独立变量,求拟合资料的最小二乘直线,(c)用 y 为独立变量,求拟合资料的最小二乘直线,(d)如果一个学生在代数上得到 75 分,他的物理的期望成绩是多少? (e)如果一个学生在物理上得到 95 分,他的代数的期望成绩是多少?

表 8-32

代数(x)	75	80	93	65	87	71	98	68	84	77
物理(y)	82	78	86	72	91	80	95	72	89	74

8.67 看表 8-33. (a)构造散点图,(b)求 y 关于 x 的最小二乘回归直线,(c)求 x 关于 y 的最小二乘回归直线,(d)在(a)的散点图上画(b)和(c)的两条回归直线.

表 8-33

第一次测验成绩(x)	6	5	8	8	7	6	10	4	9	7
第二次测验成绩(y)	8	7	7	10	5	8	10	6	8	6

最小二乘回归曲线

8.68　对表 8-34 的资料,拟合最小二乘抛物线 $y = a + bx + cx^2$.

表 8-34

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2.4	2.1	3.2	5.6	9.3	14.6	21.9

8.69　表 8-35 列出了一辆汽车在速度为 v(英里/小时)时遇到某一固定危险的停车距离 d(码).(a)画出 d 对 v 的图,(b)对资料拟合 $d = a + bv + cv^2$ 形式的最小二乘抛物线,(c)当 v 为 45(英里/小时)和 80(英里/小时)时,估计 d.

表 8-35

速度,v(英里/小时)	20	30	40	50	60	70
停止距离,d(码)	54	90	138	206	292	396

8.70　在一个培养皿中经 x 小时后,每单位体积的细菌数 y 列在表 8-36 中.(a)用一张一个坐标为对数尺度的坐标纸,对 y 作对数尺度,对 x 作通常算术尺度,画出资料图;(b)对资料作 $y = ab^x$ 形式的最小二乘曲线,并解释为什么这一特殊的方程会产生好的结果;(c)利用求得的方程计算与实际值对应的 y 值;(d)当 $x = 7$ 时,估计 y 值.

表 8-36

小时数(x)	0	1	2	3	4	5	6
单位体积中细菌数(y)	32	47	65	92	132	190	275

多元回归

8.71　表 8-37 给出三个变量 x, y 和 z 的对应值.
(a)求 z 关于 x 和 y 的最小二乘回归方程,
(b)当 $x = 10$ 和 $y = 6$ 时,估计 z.

表 8-37

x	3	5	6	8	12	14
y	16	10	7	4	3	2
z	90	72	54	42	30	12

估计的标准误差和线性相关系数

8.72　对习题 8.67 的资料,求(a)$S_{y.x}$,(b)$S_{x.y}$.

8.73　对习题 8.67 的资料,计算(a)y 的总变差,(b)对 y 的不可解释的变差,(c)对 y 的可解释的变差.

8.74　利用习题 8.73 的结果,求习题 8.67 中两次测验成绩间的相关系数.

8.75　对习题 8.67 的资料求协方差.(a)直接求,(b)利用公式 $S_{xy} = rS_xS_y$ 和习题 8.74 的结果.

8.76 表 8-38 列出了 12 名妇女的年龄 x 和心脏收缩压 y. (a)求 x 和 y 的相关系数,(b)确定 y 关于 x 的最小二乘回归直线,(c)估计一妇女 45 岁时的血压.

表 8-38

年龄(x)	56	42	72	36	63	47	55	49	38	42	68	60
血压(y)	147	125	160	118	149	128	150	145	115	140	152	155

8.77 求下列资料的相关系数. (a)习题 8.64 资料,(b)习题 8.66 资料.

8.78 两变量 x 和 y 的相关系数为 $r=0.60$, 如果 $S_x=1.50$, $S_y=2.00$, $\overline{x}=10$, $\overline{y}=20$, (a)求 y 关于 x 的回归直线方程,(b)求 x 关于 y 的回归直线方程.

8.79 对习题 8.78 的资料,计算(a)$S_{y.x}$,(b)$S_{x.y}$.

8.80 如果 $S_{y.x}=3$ 和 $S_y=5$, 求 r.

8.81 如果 x 和 y 的相关系数为 0.50,用回归方程不可解释的变差是总变差的百分之几?

8.82 x 和 y 的对应值列在表 8-39 中,(a)求相关系数,(b)将表中的每一 x 值乘 2 再加 6,将表中的每一 y 值乘 3 再减 15,求新的两组值间的相关系数.解释为什么这样做和(a)中不这样做得到相同的结果.

表 8-39

x	2	4	5	6	8	11
y	18	12	10	8	7	5

广义相关系数

8.83 对习题 8.71 中的资料,求 z 关于 x 和 y 的估计的标准误差.

8.84 对习题 8.71 中的资料,计算复相关系数.

秩相关

8.85 在一场争论中,根据对 8 个候选人 A,B,C,D,E,F,G 和 H 的喜好排序,有两种评价,总结的意见列在表 8-40 中.求秩相关系数,并决定两种评价意见是否较好地相符.

表 8-40

候选人	A	B	C	D	E	F	G	H
第一种评价	5	2	8	1	4	6	3	7
第二种评价	4	5	7	3	2	8	1	6

8.86 对下列资料求秩相关系数. (a)习题 8.67 资料,(b)习题 8.76 资料.

8.87 对习题 8.82 的资料求秩相关系数.

回归的抽样理论

8.88 以容量为 27 的一个样本做基础,求得 y 关于 x 的回归方程为 $y=25.0+2.00x$. 如果 $S_{y.x}=1.50$, $S_x=3.00$ 和 $\overline{x}=7.50$, 求回归系数的(a)95%,(b)99% 置信限.

8.89 在习题 8.88 中,检验假设:总体回归系数(a)低于 1.70,(b)高于 2.20.使用显著水平0.01.

8.90 在习题 8.88 中,求当 $x=6.00$ 时,y 的(a)95%,(b)99% 置信限.

8.91 在习题 8.88 中,当 $x=6.00$ 时,对 y 的全部值的平均值,求(a)95%,(b)99% 置信限.

8.92 看习题 8.76,求下列量的 95% 置信限,(a)y 关于 x 的回归系数,(b)全体 45 岁妇女的血压,(c)全体 45 岁妇女的血压的平均值.

相关的抽样理论

8.93 由容量为 27 的一个样本算得一相关系数为 0.50,在显著性水平(a)0.05,(b)0.01 下,我们能认为对应

的总体相关系数显著大于 0 吗?

8.94 由容量为 35 的一个样本算得一相关系数为 0.50,在显著性水平 0.05 下,我们能否拒绝假设:总体相关系数(a)小于 $\rho=0.30$,(b)大于 $\rho=0.70$.

8.95 从容量为 28 的一个样本算出一相关系数为 0.60,求该相关系数的(a)95%,(b)99% 的置信限.

8.96 如果样本容量是 52,解习题 8.95.

8.97 对习题 8.76 中计算的相关系数求 95% 置信限.

8.98 从容量分别为 23 和 28 的样本中获得两个相关系数 0.80 和 0.95,在(a)0.05 水平,(b)0.01 水平下,能否认为这两个系数存在显著差异.

综合问题

8.99 X 和 Y 的由样本资料得到的两最小二乘回归直线为 $2x-5y=3, 5x-8y=2$.求线性相关系数.

8.100 美国的 300 个成年男人的身高和体重统计列于表 8-41,求两者的相关系数.

表 8-41

体重 y(磅) \ 身高 x(英寸)	59~62	63~66	67~70	71~74	75~78
90~109	2	1			
110~129	7	8	4	2	
130~149	5	15	22	7	1
150~169	2	12	63	19	5
170~189		7	28	32	12
190~209		2	10	20	7
210~229			1	4	2

8.101 (a)利用习题 8.100 的资料,求 y 关于 x 的最小二乘回归直线,(b)两个男人的身高分别为 64 和 72 英寸,估计他们的体重.

8.102 利用习题 8.100 的资料,求(a)$S_{y.x}$,(b)$S_{x.y}$.

8.103 求习题 8.100 中算出的相关系数的 95% 置信限.

8.104 表 8-42 列出了美国全部日用品的消费价格指数和批发价格指数,其基数是 1947~1949 年期间作为 100.求两者的相关系数.

表 8-42

年	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
消费价格指数	101.8	102.8	111.0	113.5	114.4	114.8	114.5	116.2	120.2	123.5
批发价格指数	99.2	103.1	114.8	111.6	110.1	110.3	110.7	114.3	117.6	119.2

资料来自美国劳动统计局.

8.105 见表 8-43.(a)画出资料图;(b)求拟合资料的最小二乘直线,并画出它的图;(c)计算回归值并与实测值比较;(d)预测 1958 年的医疗价格指数,与真值 144.4 比较;(e)假定揭示的回归倾向能继续,在哪一年能够期望医疗价格指数是 1947 至 1949 年间的两倍.

表 8-43

年	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
医疗消费价格指数 (1947-1949=100)	106.0	111.1	117.2	121.3	125.2	128.0	132.6	138.0

资料来自美国劳动统计局.

8.106 见表 8-44.(a)画出资料图;(b)求拟合资料的最小二乘抛物线;(c)计算回归值并与实测值比较;(d)解释为什么对超出总体的目标,(b)中获得的方程是不能使用的.

表 8-44

年	1915	1920	1925	1930	1935	1940	1945	1950	1955
每1000人口出生率	25.0	23.7	21.3	18.9	16.9	17.9	19.5	23.6	24.6

资料来自美国健康与人类部.

补充习题答案

8.64 (a)$y=-\frac{1}{3}+\frac{5}{7}x$ 或 $y=-0.333+0.714x$,(b)$x=1+\frac{9}{7}y$ 或 $x=1.00+1.29y$

8.65 (a)3.24,8.24,(b)10.00

8.66 (b)$y=29.13+0.661x$,(c)$x=-14.39+1.15y$,(d)79,(e)95

8.67 (b)$y=4.000+0.500x$,(c)$x=2.408+0.612y$

8.68 $y=5.51+3.20(x-3)+0.733(x-3)^2$　或　$y=2.51-1.20x+0.733x^2$

8.69 (b)$d=41.77-1.096v+0.08786v^2$,(c)170 英尺,516 英尺

8.70 (b)$y=32.14(1.427)^x$ 或 $y=32.14(10)^{0.1544x}$ 或 $y=32.14e^{0.3556x}$,(d)387

8.71 (a)$z=61.40-3.65x+2.54y$,(b)40

8.72 (a)1.304,(b)1.443

8.73 (a)24.50,(b)17.00,(c)7.50

8.74 0.5533

8.75 1.5

8.76 (a)0.8961,(b)$y=80.78+1.138x$,(c)132

8.77 (a)0.958,(b)0.872

8.78 (a)$y=0.8x+12$,(b)$x=0.45y+1$

8.79 (a)1.60,(b)1.20

8.80 ±0.80

8.81 75%

8.82 (a)−0.9203

8.83 3.12

8.84 0.9927

8.85 $r_{秩}=\frac{2}{3}$

8.86 (a)0.5182,(b)0.9318

8.87 −1.0000

8.88 (a)2.00±0.21,(b)2.00±0.28

8.89 (a)用单侧检验,拒绝假设

(b)用单侧检验,不能拒绝假设

8.90 (a)37.0±3.6,(b)37.0±4.9

8.91 (a)37.0±1.5,(b)37.0±2.1

8.92 (a)1.138±0.398,(b)132.0±19.2,(c)132.0±5.4

8.93 (a)能,(b)不能

8.94 (a)不能,(b)能

8.95 (a)0.2923 至 0.7951,(b)0.1763 至 0.8361

8.96 (a)0.3912 至 0.7500,(b)0.3146 至 0.7861

8.97 0.7096 至 0.9653

8.98 (a)能,(b)不能

8.99 0.8

8.100 0.5440

8.101　(a)$y=4.44x-142.22$,(b)141.9 和 177.5 磅

8.102　(a)16.92 磅,(b)2.07 英寸

8.103　0.4961 至 0.7235

8.104　0.9263

8.105　(b)如果以 1954 年 1 月 1 日为零点,$\frac{1}{2}$年作为 x 的一个单位,$y=122.42+2.19x$.或者,以 1950 年 7 月 1 日为零点,1 年作为 x 的一个单位,$y=107.1+4.38x$.
(d)142.1.(e)1971.

8.106　以 1935 年 7 月 1 日为零点,5 年作为 x 的一个单位,y 为 1000 人口出生率,$y=18.16-0.1083x+0.4653x^2$.

第九章　方差分析

方差分析的目的

在第七章中,我们将抽样理论用于两个样本均值间差异的显著性检验.我们假定被抽样的两个总体有相同的方差.在许多情况下,需要对 3 个或多个样本均值间的差异作显著性检验,或等价地检验样本均值是否都相等的零假设.

例 9.1　设一个农业试验中,四种不同的土壤处理方式,分别有小麦平均产量 28,22,18 和 24 蒲式耳/每英亩.问这些均值间是否存在显著差异,或者说这些观测值的散布是否是随机引起的?

这样的问题能够使用费歇耳(Fisher)的称为方差分析的重要技术得到解决.它使用在前面章节中已经提到的 F 分布.

一种方式分组或一因素试验

在一因素试验中,测量值或观测值是针对 a 个不同的样本群,每群中测量的数目是 b.我们称有 a 个处理,每个处理有 b 个重复或复制品.在例 9.1 中,$a=4$.

一因素试验的结果可以表示成有 a 行 b 列的一张表(表 9-1).

表 9-1

处理 1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1b}	$\bar{x}_{1\cdot}$
处理 2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2b}	$\bar{x}_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
处理 a	x_{a1}	x_{a2}	$\cdots$	x_{ab}	$\bar{x}_{a\cdot}$

其中 x_{jk}表示第j 行第k 列的测量值,$j=1,2,\cdots,a$,$k=1,2,\cdots,b$.例如 x_{35}是第三处理的第五个测量值.

我们以 $\bar{x}_{j\cdot}$ 记第 j 行的测量值的平均值.有

$$\bar{x}_{j\cdot} = \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b} x_{jk} \qquad j = 1,2,\cdots,a \tag{1}$$

$\bar{x}_{j\cdot}$ 中的圆点用于说明下角标 k 进行了和的运算.值 $\bar{x}_{j\cdot}$ 称为组平均,处理平均或行平均.总平均或全体平均是全部群中的所有测量值的平均,记为 $\bar{x}$,即

$$\bar{x} = \frac{1}{ab}\sum_{j,k} x_{jk} = \frac{1}{ab}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} x_{jk} \tag{2}$$

总方差,处理内方差,处理间方差

我们用 v 记总方差,它是每一个测量值对总平均 $\bar{x}$ 的偏离的平方和,即

$$总方差 = v = \sum_{j,k}(x_{jk} - \bar{x})^2 \tag{3}$$

有等式

$$x_{jk} - \bar{x} = (x_{jk} - \bar{x}_{j}) + (\bar{x}_{j\cdot} - \bar{x}) \tag{4}$$

那么平方再对 j 和 k 求和,可以说明有(见习题 9.1)

$$\sum_{j,k}(x_{jk} - \bar{x})^2 = \sum_{j,k}(x_{jk} - \bar{x}_{j\cdot})^2 + \sum_{j,k}(\bar{x}_{j\cdot} - \bar{x})^2 \tag{5}$$

或

$$\sum_{j,k}(x_{jk}-\bar{x})^2=\sum_{j,k}(x_{jk}-\bar{x}_{j.})^2+b\sum_{j}(\bar{x}_{j.}-\bar{x})^2 \tag{6}$$

等式(5)或(6)右边的第一个和式称为处理内方差(因为它包含 x_{jk} 对处理平均值 $\bar{x}_{j.}$ 的偏差的平方),记为 v_w.因此

$$v_w=\sum_{j,k}(x_{jk}-\bar{x}_{j.})^2 \tag{7}$$

等式(5)或(6)右边的第二个和式称为处理间方差(因为它包含各个处理平均值 $\bar{x}_{j.}$ 与总平均 $\bar{x}$ 的偏差的平方),记为 v_b.因此

$$v_b=\sum_{j,k}(\bar{x}_{j.}-\bar{x})^2=b\sum_{j}(\bar{x}_{j.}-\bar{x})^2 \tag{8}$$

这样等式(5)或(6)可以写成

$$v=v_w+v_b \tag{9}$$

获得方差的简明方法

在计算上述方差中为了节省计算量,用下列公式是方便的:

$$v=\sum_{j,k}x_{jk}^2-\frac{\tau^2}{ab} \tag{10}$$

$$v_b=\frac{1}{b}\sum_{j}\tau_{j}^2-\frac{\tau^2}{ab} \tag{11}$$

$$v_w=v-v_b \tag{12}$$

其中 τ 是全部值 x_{jk} 的总数,而 $\tau_{j.}$ 是第 j 处理的全部值的总数,即

$$\tau=\sum_{j,k}x_{jk},\quad \tau_{j.}=\sum_{k}x_{jk} \tag{13}$$

实践中将表中的全部数据减去某一固定值往往是方便的,这样做不会影响最后的结果.

方差分析的线性数学模型

我们可以考虑表 9-1 的每一行表示一个容量为 b 的随机样本,它来自对应的特殊处理的总体.因此,对 j 处理,有独立同分布的随机变量 $X_{j1},X_{j2},\cdots,X_{jb}$,它们的取值分别为 $x_{j1},x_{j2},\cdots,x_{jb}$. $X_{jk}(k=1,2,\cdots,b)$的每一个可表示为它的期望值和"随机"或"误差"项之和:

$$X_{jk}=\mu_j+\Delta_{jk} \tag{14}$$

Δ_{jk}能够作为独立(对 j 也对 k)正态分布的随机变量,其均值为 0,方差为 σ^2. 这等价于假定 $X_{jk}(j=1,2,\cdots,a,k=1,2,\cdots,b)$是相互独立的正态分布,具有均值 μ_j 和共同的方差 σ^2.

我们定义常数 μ

$$\mu=\frac{1}{a}\sum_{j}\mu_j$$

我们可以认为 μ 是相对于全部处理总体的一种整个总体的平均.那么(14)式可写成(见习题 9.18)

$$X_{jk}=\mu+\alpha_j+\Delta_{jk},\quad 其中\quad \sum_{j}\alpha_j=0 \tag{15}$$

常数 α_j 可看作是第 j 处理的特殊效应.

全部处理均值相等的零假设为 $H_0:\alpha_j=0;j=1,2,\cdots,a$ 或等价地为 $H_0:\mu_j=\mu;j=1,2,\cdots,a$. 如果 H_0 为真,被假定有正态分布的各处理总体将有共同的均值,也有共同的方差,那么仅有一个处理总体,全部处理总体是统计上完全相同的.

方差的期望值

处理间方差 V_b,处理内方差 V_w 和总方差 V 都是随机变量,他们分别假定有(8),(7)和(3)式中定义的值 v_b, v_w 和 v. 我们能够说明(习题 9.19)有

$$E(V_b) = (a-1)\sigma^2 + b\sum_j \alpha_j^2 \tag{16}$$

$$E(V_w) = a(b-1)\sigma^2 \tag{17}$$

$$E(V) = (ab-1)\sigma^2 + b\sum \alpha_j^2 \tag{18}$$

从(17)式可得

$$E\left[\frac{V_w}{a(b-1)}\right] = \sigma^2 \tag{19}$$

这样不管 H_0 是真还是假,

$$\hat{S}_w^2 = \frac{V_w}{a(b-1)} \tag{20}$$

总是 σ^2 的一个优秀的(无偏)估计.另一方面,从(16)和(18)式,可以看到如果 H_0 为真的话,有

$$E\left(\frac{V_b}{a-1}\right) = \sigma^2 \quad E\left(\frac{V}{ab-1}\right) = \sigma^2 \tag{21}$$

所以仅当 H_0 为真时,

$$\hat{S}_b^2 = \frac{V_b}{a-1}, \quad \hat{S}^2 = \frac{V}{ab-1} \tag{22}$$

提供了 σ^2 的无偏估计.然而如果 H_0 不是真的,从(16)式则有

$$E(\hat{S}_b^2) = \sigma^2 + \frac{b}{a-1}\sum_j \alpha_j^2 \tag{23}$$

方差的分布

使用第四章的定理 4-4,便可证明下列涉及变量 V_w, V_b 和 V 的分布的基本定理.

定理 9-1　V_w/σ^2 具有 $a(b-1)$个自由度的卡方分布.

定理 9-2　在假设 H_0 下, V_b/σ^2 和 V/σ^2 分别具有自由度为 $a-1$ 和 $ab-1$ 的卡方分布.

特别强调一下,定理 9-1 无论是否假定 H_0 成立,均是可用的.而定理 9-2 仅在假定 H_0 成立时有用.

相等均值的零假设下的 F 检验

如果零假设 H_0 不是真的,即如果处理的各均值不相等,从(23)式看,我们可以期望 $\hat{S}_b^2$ 比 σ^2 大,随着均值间的差异的增加,其影响会更显著.另一方面,不管均值是否相等,从(19)和(20)式,我们可以期望 $\hat{S}_w^2$ 等于 σ^2.这就为检验假设 H_0 导出了一个好的统计量 $\hat{S}_b^2/\hat{S}_w^2$.如果它是显著地大,我们能够认为处理均值间存在显著差异.从而拒绝 H_0.否则我们能够接收 H_0 或者等待进一步分析暂不判定.

为了使用这个统计量,我们必须知道它的分布.下述定理提供了这个分布.该定理是第五章定理 5-8 的推论.

定理 9-3　统计量 $F=\hat{S}_b^2/\hat{S}_w^2$ 具有自由度为 $a-1$ 和 $a(b-1)$的 F 分布.

定理 9-3 使我们能够在某些指定的显著性水平下,利用 F 分布的单侧检验来检验零假设.

方差分析表

上述检验所要求的计算可总结成表 9-2,该表称为方差分析表.在实际工作中,我们可以用(3)和(8)式直接计算 v 和 v_b,也可以用简明算法的(10)和(11)式来计算,然后再计算 $v_w = v - v_b$.应该注意总方差的自由度是 $ab-1$,此值等于处理间和处理内方差的自由度的和.

表 9-2

方差	自由度	均方	F
处理间 $v_b = b\sum\limits_j(\bar{x}_j - \bar{x})^2$	$a-1$	$\hat{S}_b^2 = \dfrac{v_b}{a-1}$	$\dfrac{\hat{S}_b^2}{\hat{S}_w^2}$ 具有 $a-b, a(b-1)$ 自由度
处理内 $v_w = v - v_b$	$a(b-1)$	$\hat{S}_w^2 = \dfrac{v_w}{a(b-1)}$	
总的 $v = v_b + v_w$ $= \sum\limits_{j,k}(x_{jk} - x)^2$	$ab-1$		

不等观测数的修正

在处理 $1,\cdots,a$ 中有不同的观测数，它们分别为 $n_1,\cdots,n_a$ 时，可以对上述结果容易地作出修正．我们此时获得

$$v = \sum_{j,k}(x_{jk} - \bar{x})^2 = \sum_{j,k}x_{jk}^2 - \frac{\tau^2}{n} \tag{24}$$

$$v_b = \sum_{j,k}(\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2 = \sum_j n_j(\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2 = \sum_j \frac{\tau_{j.}^2}{n_j} - \frac{\tau^2}{n} \tag{25}$$

$$v_w = v - v_b \tag{26}$$

其中 $\sum\limits_{j,k}$ 是对 k 从 1 到 n_j，j 从 1 到 a 求和．$n = \sum\limits_j n_j$ 是全部处理的一切观测的总数．τ 是全部观测的和，$\tau_{j.}$ 是第 j 处理的全部观测值的和，$\sum\limits_j$ 表示从 1 到 a 求和．这时的方差分析表给定为表 9-3．

表 9-3

方差	自由度	均方	F
处理间 $v_b = \sum\limits_j n_j(\bar{x}_j - \bar{x})^2$	$a-1$	$\hat{S}_b^2 = \dfrac{v_b}{a-1}$	$\dfrac{\hat{S}_b^2}{\hat{S}_w^2}$ 具有 $a-1, n-a$ 自由度
处理内 $v_w = v - v_b$	$n-a$	$\hat{S}_w^2 = \dfrac{v_w}{n-a}$	
总的 $v = v_b + v_w$ $= \sum\limits_{j,k}(x_{jk} - \bar{x})^2$	$n-1$		

二种方式分组或二因素试验

一种方式分组或一因素试验的方差分析的概念可以推广，现在我们说明两种方式分组或二因素试验的程序．

例 9.2 假设一个农业试验考察每英亩的产量，有 4 个不同的小麦品种，每个品种种在 5 块不同的地块上．那么总地块是 $4\times5=20$．这时将地块组合成区组．每区组有 4 个地块是方便的．在每个区组内的一块地上种一个小麦品种．因此这里有 5 个区组．

这时存在两种方式分组或两种因素．因为由于(i)指定小麦品种的生长，(ii)使用指定的区组(它可能蕴含着不同的肥沃程度等等)，使每英亩的产量存在差异．

像例 9.2 的农业试验那样，我们常将试验中的两种分组或因素称为处理和区组. 但简单一点可直接称为因素 1 和因素 2.

二因素试验的符号

假定我们有 a 个处理和 b 个区组，构造成表 9-4. 表中假定对应每一个处理和区组存在一个试验值(例如，每英亩产量). 对处理 j 和区组 k 记对应值为 x_{jk}.

表 9-4

		区组 1	2	…	b	
处理	1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1b}	$\bar{x}_{1.}$
	2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2b}	$\bar{x}_{2.}$
	⋮	⋮	⋮	⋮		
	a	x_{a1}	x_{a2}	…	x_{ab}	$\bar{x}_{a.}$
		$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}_{.2}$	…	$\bar{x}_{.b}$	

在第 j 行中的单元小格的均值记为 $\bar{x}_{j.}$，$j=1,\cdots,a$，在第 k 列中的单元小格的均值记为 $\bar{x}_{.k}$，$k=1,\cdots,b$. 全体的或总的平均记为 $\bar{x}$，即

$$\bar{x}_{j.} = \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b} x_{jk}, \quad \bar{x}_{.k} = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{a} x_{jk}, \quad \bar{x} = \frac{1}{ab}\sum_{j,k} x_{jk} \tag{27}$$

二因素试验的方差

和一因素试验的情况一样，我们可以定义二因素试验的方差. 首先像(3)式一样定义总方差：

$$v = \sum_{j,k}(x_{jk} - \bar{x})^2 \tag{28}$$

由等式

$$x_{jk} - \bar{x} = (x_{jk} - \bar{x}_{j.} - \bar{x}_{.k} + \bar{x}) + (\bar{x}_{j.} - \bar{x}) + (\bar{x}_{.k} - \bar{x}) \tag{29}$$

取平方再对 j 和 k 求和，可以阐明

$$v = v_e + v_r + v_c \tag{30}$$

这里

$$v_e = \text{由误差或随机引起的方差} = \sum_{j,k}(x_{jk} - \bar{x}_{j.} - \bar{x}_{.k} + \bar{x})^2$$

$$v_r = \text{行(处理)间方差} = b\sum_{j=1}^{a}(\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2$$

$$v_c = \text{列(区组)间方差} = a\sum_{k=1}^{b}(\bar{x}_{.k} - \bar{x})^2$$

由误差或随机引起的方差也就是熟知的剩余方差.

类似于(10)，(11)和(12)，有下列简明计算公式：

$$v = \sum_{j,k} x_{jk}^2 - \frac{\tau^2}{ab} \tag{31}$$

$$v_r = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{a}\tau_{j.}^2 - \frac{\tau^2}{ab} \tag{32}$$

$$v_c = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{b}\tau_{.k}^2 - \frac{\tau^2}{ab} \tag{33}$$

$$v_e = v - v_r - v_c \tag{34}$$

这里 $\tau_{j.}$ 是第 j 行的单元小格的总和，$\tau_{.k}$ 是第 k 列的单元小格的总和，τ 是全部单元小格的总和.

二因素试验的方差分析

对两因素试验的数学模型，我们假定取值为 x_{jk} 的随机变量 X_{jk} 能够写成

$$X_{jk} = \mu + \alpha_j + \beta_k + \Delta_{jk} \tag{35}$$

这里 μ 是总体的总均值，α_j 是 X_{jk} 中由不同的处理引起的部分（常称为处理效应），β_k 是 X_{jk} 中由不同的区组引起的部分（常称为区组效应），而 Δ_{jk} 则是 X_{jk} 中由随机或误差引起的部分. 和前面一样，我们可以认为 Δ_{jk} 是独立正态随机变量，具有均值 0 和方差 σ^2. 所以 X_{jk} 也是独立正态分布的随机变量，具有方差 σ^2. 在适当的假定下，对 X_{jk} 的均值有

$$\sum_j \alpha_j = 0 \quad \sum_k \beta_k = 0 \tag{36}$$

这时

$$\mu = \frac{1}{ab}\sum_{j,k} E(X_{jk})$$

对应于(16)式至(18)式的结果，可以证明

$$E(V_r) = (a-1)\sigma^2 + b\sum_j \alpha_j^2 \tag{37}$$

$$E(V_c) = (b-1)\sigma^2 + a\sum_k \beta_k^2 \tag{38}$$

$$E(V_e) = (a-1)(b-1)\sigma^2 \tag{39}$$

$$E(V) = (ab-1)\sigma^2 + b\sum_j \alpha_j^2 + a\sum_k \beta_k^2 \tag{40}$$

存在两个我们希望检验的零假设：

$H_0^{(1)}$：全部处理（行）均值相等，即 $\alpha_j = 0, j = 1, \cdots, a$.

$H_0^{(2)}$：全部区组（列）均值相等，即 $\beta_k = 0, k = 1, \cdots, b$.

不管 $H_0^{(1)}$ 或 $H_0^{(2)}$，从(39)式可以看到，σ^2 有一个优秀的（无偏）估计

$$\hat{S}_e^2 = \frac{V_e}{(a-1)(b-1)}, \quad 即\ E(\hat{S}_e^2) = \sigma^2 \tag{41}$$

另外，如果假设 $H_0^{(1)}$ 和 $H_0^{(2)}$ 为真，则

$$\hat{S}_r^2 = \frac{V_r}{a-1}, \quad \hat{S}_c^2 = \frac{V_c}{b-1}, \quad \hat{S}^2 = \frac{V}{ab-1} \tag{42}$$

都是 σ^2 的无偏估计. 然而如果 $H_0^{(1)}$ 和 $H_0^{(2)}$ 不为真，从(37)式和(38)式可分别得到

$$E(\hat{S}_r^2) = \sigma^2 + \frac{b}{a-1}\sum_j \alpha_j^2 \tag{43}$$

$$E(\hat{S}_c^2) = \sigma^2 + \frac{a}{b-1}\sum_k \beta_k^2 \tag{44}$$

下面的定理类似于定理 9-1 和定理 9-2.

定理 9-4　不论假设 $H_0^{(1)}$ 和 $H_0^{(2)}$ 是否成立，V_e/σ^2 具有自由度为 $(a-1)(b-1)$ 的卡方分布.

定理 9-5　在 $H_0^{(1)}$ 下，V_r/σ^2 具有自由度为 $a-1$ 的卡方分布. 在 $H_0^{(2)}$ 下，V_c/σ^2 具有自由度为 $b-1$ 的卡方分布. 在 $H_0^{(1)}$ 和 $H_0^{(2)}$ 下，V/σ^2 具有自由度为 $ab-1$ 的卡方分布.

为了检验假设 $H_0^{(1)}$，自然会考虑统计量 $\hat{S}_r^2/\hat{S}_e^2$，因为如果处理（行）均值显著地不同的话，从(43)式，可以期望 $\hat{S}_r^2$ 会显著地与 σ^2 有差异. 类似地，为了检验 $H_0^{(2)}$，考虑统计量 $\hat{S}_c^2/\hat{S}_e^2$，$\hat{S}_r^2/\hat{S}_e^2$ 和 $\hat{S}_c^2/\hat{S}_e^2$ 的分布由下述类似定理 9-3 的定理给出.

定理 9-6　在假设 $H_0^{(1)}$ 下，统计量 $\hat{S}_r^2/\hat{S}_e^2$ 具有自由度为 $a-1$ 和 $(a-1)(b-1)$ 的 F 分

布.在假设 $H_0^{(2)}$ 下,统计量 $\hat{S}_c^2/\hat{S}_e^2$ 具有自由度为 $b-1$ 和 $(a-1)(b-1)$ 的 F 分布.

这条定理可以使我们在给定的显著性水平下,接收或者拒绝 $H_0^{(1)}$ 或 $H_0^{(2)}$. 为了方便,和一因素的情况类似,可以构造表 9-5 的方差分析表.

表 9-5

方　差	自　由　度	均　方	F
处理间 $v_r = b\sum_j(\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2$	$a-1$	$\hat{S}_r^2 = \frac{v_r}{a-1}$	$\hat{S}_r^2/\hat{S}_e^2$ 具有 $a-1$ $(a-1)(b-1)$ 自由度
区组间 $v_c = a\sum_k(\bar{x}_{.k} - \bar{x})^2$	$b-1$	$\hat{S}_c^2 = \frac{v_r}{b-1}$	$\hat{S}_c^2/\hat{S}_e^2$ 具有 $b-1$ $(a-1)(b-1)$ 自由度
剩余或随机 $v_e = v - v_r - v_c$	$(a-1)(b-1)$	$\hat{S}_e^2 = \frac{v_e}{(a-1)(b-1)}$	
总的 $v = v_r - v_c + v_e$ $= \sum_{j,k}(x_{jk} - x)^2$	$ab-1$		

有重复的二因素试验

在表 9-4 中,对应每一给定的处理和一给定的区组,仅有一个单元小格数据,进行重复试验常能对因素获得更多的信息,这一过程称为复制.这时对应一给定的处理和一给定的区组有多于一个的单元小格数据,我们假定每一位置有 c 个数据,适当地进行一些修改可以考虑重复数不相等的情形.

由于有重复,对(35)式的模型必须替换成一个适当的模型.为此,对第 j 行或处理,第 k 列或区组和第 l 个重复或复制记为随机变量 X_{jkl}.给出的模型为

$$X_{jkl} = \mu + \alpha_j + \beta_k + \gamma_{jk} + \Delta_{jkl}$$

这里 μ, α_j, β_k 的定义和前面一样,Δ_{jkl}是独立正态分布的随机变量,具有均值 0 和方差 σ^2,而 γ_{jk}是行与列或处理与区组的交互效应(常简单地称为交互项).对应于(36)式有

$$\sum_j \alpha_j = 0, \quad \sum_k \beta_k = 0, \quad \sum_j \gamma_{jk} = 0, \quad \sum_k \gamma_{jk} = 0 \tag{45}$$

和上面一样,全部数据的总方差 v 可以分解为行方差 v_r,列方差 v_c 和随机的或剩余的误差 v_e 等:

$$v = v_r + v_c + v_i + v_e \tag{46}$$

这里

$$v = \sum_{j,k,l}(x_{jkl} - \bar{x})^2 \tag{47}$$

$$v_r = bc\sum_{j=1}^{a}(\bar{x}_{j..} - \bar{x})^2 \tag{48}$$

$$v_c = ac\sum_{k=1}^{b}(\bar{x}_{.k.} - \bar{x})^2 \tag{49}$$

$$v_i = c\sum_{j,k}(\bar{x}_{jk.} - x_{j..} - \bar{x}_{.k.} + \bar{x})^2 \tag{50}$$

$$v_e = \sum_{j,k,l}(x_{jkl} - \bar{x}_{jk.})^2 \tag{51}$$

在这些式中,下角标中的圆点的意义与那些在前面使用的意义类似.例如

$$\bar{x}_{j..} = \frac{1}{bc}\sum_{k,l}x_{jkl} = \frac{1}{b}\sum_k \bar{x}_{jk.} \tag{52}$$

表 9-6

方差	自由度	均方	F
处理间 v_r	$a-1$	$\hat{S}_r^2=\frac{v_r}{a-1}$	$\hat{S}_r^2/\hat{S}_e^2$ 具有 $a-1$, $ab(c-1)$ 自由度
区组间 v_c	$b-1$	$\hat{S}_c^2=\frac{v_c}{b-1}$	$\hat{S}_c^2/\hat{S}_e^2$ 具有 $b-1$, $ab(c-1)$ 自由度
交互项 v_i	$(a-1)(b-1)$	$\hat{S}_i^2=\frac{v_i}{(a-1)(b-1)}$	$\hat{S}_i^2/\hat{S}_e^2$ 具有 $(a-1)(b-1)$, $ab(c-1)$ 自由度
剩余或随机 v_e	$ab(c-1)$	$\hat{S}_e^2=\frac{v_e}{ab(c-1)}$	
总的 v	$abc-1$		

对每一来源的方差使用适当的自由度,可以列出表 9-6 的方差分析表.

表 9-6 最后一列的 F 比可用于检验下列零假设:

$H_0^{(1)}$:全部处理(行)均值相等,即 $\alpha_j=0$.

$H_0^{(2)}$:全部区组(列)均值相等,即 $\beta_k=0$.

$H_0^{(3)}$:不存在处理和区组的交互项,即 $\gamma_{jk}=0$.

从实际工作的观点出发,我们应该首先使用表 9-6 中的 F 比 $\hat{S}_i^2/\hat{S}_e^2$ 在适当的显著性水平下,决定是否拒绝 $H_0^{(3)}$,这时有两种可能情况.

情况Ⅰ $H_0^{(3)}$ 不能被拒绝.这时我们可以认为交互项不是太大,那么使用表 9-6 中的 F 比 $\hat{S}_r^2/\hat{S}_e^2$ 和 $\hat{S}_c^2/\hat{S}_e^2$ 分别检验 $H_0^{(1)}$ 和 $H_0^{(2)}$. 有些统计学家建议:在这种情况下,使用混合方差 v_i-v_e 除以它对应的自由度 $(a-1)(b-1)+ab(c-1)$,以此值代替 F 检验中的分母 $\hat{S}_e^2$.

情况Ⅱ $H_0^{(3)}$ 能被拒绝.这时我们可以认为交互项是显著地大.因素内的差异只有比这样的交互项大时,它们才是重要的.由于这一原因,许多统计学家建议:使用 F 比 $\hat{S}_r^2/\hat{S}_i^2$ 和 $\hat{S}_c^2/\hat{S}_i^2$,而不是用表 9-6 中的那些 F 比,去检验假设 $H_0^{(1)}$ 和 $H_0^{(2)}$. 我们也将使用这一选择.

若首先将对应给定处理(行)和区组(列)的重复观测值总和在一起,是进行有重复的方差分析的一种最简单的方法.这样产生一个二因素表,它的单元小格具有单一的数据,可以像表 9-5 那样进行分析.在习题 9.13 中阐述了这一做法.

试验设计

上面讨论的方差分析技术,是在试验的结果已经观测到后进行的.然而,为了尽可能多地获得信息,必须预先细心地计划好一个试验的细节.这经常涉及到试验设计.下面给出几个重要的试验设计的例子.

1. 完全随机化设计.假定我们有一个例 9.1 那样的农业试验.为了设计这样的试验,可以将一块地分成 $4\times4=16$ 个小块(如图 9-1 用正方形所示,本质上用任一形状均可).用 A,B,C,D 表示处理,每一处理对 4 个区组完全随机地进行选择.随机化的目的是消除诸如土壤肥沃等的各种误差来源.

2. 随机化区组设计.如果像例 9.2 那样,每一区组有全部的处理,处理 A,B,C,D 按随机顺序引入每一区组Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ(见图 9-2).由于这一原因,区组常称为随机化区组.当希望

控制一个误差或可变性来源,也就是区组间差异时,使用这种类型的设计.

D	A	C	C
B	D	B	A
D	C	B	D
A	B	C	A

完全随机化

图 9-1

I	C	B	A	D
II	A	B	D	C
III	B	C	D	A
IV	A	D	C	B

随机化区组

图 9-2

3. 拉丁方设计.有时必须同时控制两个误差或可变性来源,比如行间差异和列间差异.例如在例 9.1 的试验中,不同的行和列间的误差可能是在不同地块部分中的土壤肥沃的变化引起的.这时应希望在每一行中每一处理出现一次,同时每一列中每一处理出现一次,如图 9-3.这样的安排称为拉丁方.这一名称是因使用了拉丁字母 A,B,C,D 等.

4. 希腊-拉丁方设计.如果必须控制三个误差或可变性来源.使用图 9-4 所示的希腊-拉丁方.这个方形是两个拉丁方的相互重叠,一个拉丁方使用字母 A,B,C,D,另一个使用希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.一个必然的附加要求是每一个拉丁字母与每一个希腊字母相遇一次且只相遇一次.当具有这一性质时,此正方形称为是正交的.

D	B	C	A
B	D	A	C
C	A	D	B
A	C	B	D

拉丁方

图 9-3

B_γ	A_β	D_δ	C_α
A_δ	B_α	C_γ	D_β
D_α	C_δ	B_β	A_γ
C_β	D_γ	A_α	B_δ

希腊一拉丁方

图 9-4

习题解答

一种方式分组或一因素试验

9.1 证明

$$\sum_{j,k}(x_{jk}-\bar{x})^2=\sum_{j,k}(x_{jk}-\bar{x}_{j.})^2+\sum_{j,k}(\bar{x}_{j.}-\bar{x})^2$$

证明 ☞ 有 $x_{jk}-\bar{x}=(x_{jk}-\bar{x}_{j.})+(\bar{x}_{j.}-\bar{x})$.两边平方再对 j 和 k 求和,即可得

$$\sum_{j,k}(x_{jk}-\bar{x})^2=\sum_{j,k}(x_{jk}-\bar{x}_{j.})^2+\sum_{j,k}(\bar{x}_{j.}-\bar{x})^2+2\sum_{j,k}(x_{jk}-\bar{x}_{j.})(\bar{x}_{j.}-\bar{x})$$

为了证明要求的结果,必须说明最后一个和项为 0. 这可从下式得到,由于 $\bar{x}_{j.}=\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b}x_{jk}$,所以有

$$\sum_{j,k}(x_{jk}-\bar{x}_{j.})(\bar{x}_{j.}-\bar{x})=\sum_{j=1}^{a}(\bar{x}_{j.}-\bar{x})\left[\sum_{k=1}^{b}(x_{jk}-\bar{x}_{j.})\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{a}(\bar{x}_{j.}-\bar{x})\left[\left(\sum_{k=1}^{b}x_{jk}\right)-b\bar{x}_{j.}\right]=0$$

9.2 使用前面约定的符号,证明

(a) $\tau=ab\bar{x}$, (b) $\tau_{j.}=b\bar{x}_{j.}$, (c) $\sum_j\tau_{j.}=ab\bar{x}$.

证明 ☞ (a) $\tau=\sum_{j,k}x_{jk}=ab\left(\frac{1}{ab}\sum_{j,k}x_{jk}\right)=ab\bar{x}$

(b) $\tau_{j.}=\sum_k x_{jk}=b\left(\frac{1}{b}\sum_k x_{jk}\right)=b\bar{x}_{j}$

(c) 由于 $\tau_j = \sum_k x_{jk}$，用(a)部分的结果，有

$$\sum_j \tau_j = \sum_j \sum_k x_{jk} = \tau = ab\bar{x}$$

9.3 证明简明计算公式(10)至(12).

证明 ☞ 我们有

$$\begin{aligned}
v &= \sum_{j,k}(x_{jk}-\bar{x})^2 = \sum_{j,k}(x_{jk}^2 - 2\bar{x}x_{jk} + \bar{x}^2)\\
&= \sum_{j,k}x_{jk}^2 - 2\bar{x}\sum_{j,k}x_{jk} + ab\bar{x}^2\\
&= \sum_{j,k}x_{jk}^2 - 2\bar{x}(ab\bar{x}) + ab\bar{x}^2\\
&= \sum_{j,k}x_{jk}^2 - ab\bar{x}^2 = \sum_{j,k}x_{jk}^2 - \frac{\tau^2}{ab}
\end{aligned}$$

在上面的第三行和最后一行中使用了习题 9.2(a). 类似地，

$$\begin{aligned}
v_b &= \sum_{j,k}(\bar{x}_{j.}-\bar{x})^2 = \sum_{j,k}(\bar{x}_{j.}^2 - 2\bar{x}\bar{x}_{j.} + \bar{x}^2)\\
&= \sum_{j,k}\bar{x}_{j.}^2 - 2\bar{x}\sum_{j,k}\bar{x}_{j.} + ab\bar{x}^2\\
&= \sum_{j,k}\left(\frac{\tau_{j.}}{b}\right)^2 - 2\bar{x}\sum_{j,k}\frac{\tau_{j.}}{b} + ab\bar{x}^2\\
&= \frac{1}{b^2}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\tau_{j.}^2 - 2\bar{x}(ab\bar{x}) + ab\bar{x}^2\\
&= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{a}\tau_{j.}^2 - ab\bar{x}^2\\
&= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{a}\tau_{j}^2 - \frac{\tau^2}{ab}
\end{aligned}$$

在上面的第三行中使用了习题 9.2(b)，而在最后一行使用了习题 9.2(a).

最后，从 $v = v_b + v_w$ 或 $v_w = v - v_b$，可得公式(12).

9.4 表 9-7 给出了在经化学肥料 A，B 或 C 处理的一个特殊类型的土壤中生长的小麦的产量(蒲式耳/每英亩). 求(a)每一不同处理的平均产量，(b)全部处理的总平均，(c)总方差，(d)处理间方差，(e)处理内方差. 用直接计算公式.

表 9-7

A	48	49	50	49
B	47	49	48	48
C	49	51	50	50

解 ☞ 为了简化算术计算，可从全部数据减去一个适当的数 45，这不会影响方差的值，这样得到表 9-8 数据.

表 9-8

3	4	5	4
2	4	3	3
4	6	5	5

(a) 表 9-8，处理(行)平均值分别为

$$\bar{x}_{1.} = \frac{1}{4}(3+4+5+4) = 4,\quad \bar{x}_{2.} = \frac{1}{4}(2+4+3+3) = 3,\quad \bar{x}_{3.} = \frac{1}{4}(4+6+5+5) = 5$$

每个加上 45，因此 A，B 和 C 的平均产量分别为 49，48 和 50(蒲式耳/每英亩).

(b) $\bar{x} = \frac{1}{12}(3+4+5+4+2+4+3+3+4+6+5+5) = 4$

因此总的平均产量为 45+4=49(蒲式耳/每英亩).

(c) 总方差 $= v = \sum_{j,k}(x_{jk} - \bar{x})^2$

$$= (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2 + (2-4)^2 + (4-4)^2 + (3-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (6-4)^2 + (5-4)^2 + (5-4)^2 = 14$$

(d) 处理间方差 $= v_b = b\sum_j(\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2$

$$= 4[(4-4)^2 + (3-4)^2 + (5-4)^2] = 8$$

(e) 处理内方差 $= v_w = v - v_b = 14 - 8 = 6$

另解

$$v_w = \sum_{j,k}(x_{jk} - \bar{x}_{j.})^2$$
$$= (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 + (3-3)^2 + (3-3)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (5-5)^2 + (5-5)^2 = 6$$

9.5 对习题 9.4,求总体方差 σ^2 的一个无偏估计,(a)在处理均值相等的零假设下,用处理间方差,(b)用处理内方差.

解 ☞ (a)
$$\hat{S}_b^2 = \frac{v_b}{a-1} = \frac{8}{3-1} = 4$$

(b)
$$\hat{S}_w^2 = \frac{v_w}{a(b-1)} = \frac{6}{3(4-1)} = \frac{2}{3}$$

9.6 对习题 9.4,我们能够拒绝均值相等的零假设吗?(a)在 0.05 显著性水平,(b)在 0.01 显著性水平.

解 ☞ 我们有

$$F = \frac{\hat{S}_b^2}{\hat{S}_w^2} = \frac{4}{2/3} = 6$$

此统计量具有自由度 $a-1=3-1=2$ 和 $a(b-1)=3(4-1)=9$.

(a)查附录 F 的表,$\nu_1=2$ 和 $\nu_2=9$,有 $F_{0.95}=4.26$. 由于 $F=6>F_{0.95}$,在显著性水平 0.05 下,我们能够拒绝均值相等的零假设.

(b)查附录 F 的表,$\nu_1=2$ 和 $\nu_2=9$,有 $F_{0.99}=8.02$,由于 $F=6<F_{0.99}$,在显著性水平 0.01 下,我们不能拒绝均值相等的零假设.

习题 9.4 至 9.6 获得的方差分析表列在表 9-9 中.

表 9-9

方　差	自　由　度	均　方	F
处理间 $v_b=8$	$a-1=2$	$\hat{S}_b^2=\frac{8}{2}=4$	$F=\frac{\hat{S}_b^2}{\hat{S}_w^2}=\frac{4}{2/3}=6$ 具有 2,9 自由度
处理内 $v_w=v-v_b=14-8=6$	$a(b-1)=(3)(3)=9$	$\hat{S}_w^2=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$	
总的 $v=14$	$ab-1=(3)(4)-1=11$		

9.7 使用简明公式(10)至(12),求习题 9.4 的结果.

解 ☞ (a)有

$$\sum_{j,k} x_{jk}^2 = 9+16+25+16+4+16+9+9+16+36+25+25=206$$

另外

$$\tau = 3+4+5+4+2+4+3+3+4+6+5+5=48$$

因此

$$v = \sum_{j,k} x_{jk}^2 - \frac{\tau^2}{ab} = 206 - \frac{48^2}{3\times 4} = 206-192=14$$

(b) 行的总和为

$$\tau_{1.} = 3+4+5+4=16$$

$$\tau_{2.} = 2+4+3+3=12$$

$$\tau_{3.} = 4+6+5+5=20$$

另外

$$\tau = 16+12+20=48$$

所以

$$v_b = \frac{1}{b}\sum_j \tau_{j.}^2 - \frac{\tau^2}{ab}$$

$$= \frac{1}{4}(16^2+12^2+20^2) - \frac{48^2}{3\times 4} = 200-192=8$$

(c) $v_w = v - v_b = 14-8=6$

将数据排列成表 9-10 是比较方便的.

表 9-10

					$\tau_{j.}$	$\tau_{j.}^2$
A	3	4	5	4	16	256
B	2	4	3	3	12	144
C	4	6	5	5	20	400
	$\sum_{j,k} x_{jk}^2 = 206$				$\tau = \sum_j \tau_{j.} = 48$	$\sum_j \tau_{j.}^2 = 800$

$$v = 206 - \frac{48^2}{3\times 4} = 14$$

$$v_b = \frac{1}{4}\times 800 - \frac{48^2}{3\times 4} = 8$$

所算结果与习题 9.4 所得是一样的,其分析过程当然也与前面一样.

9.8 一家公司想购买 A,B,C,D,E 五个不同机器中的一个,为了确定机器的运行是否有差异,设计了一个试验,5 个实验操作员每人在机器上工作相同的时间,生产的产品数列在表 9-11 中,在(a)0.05,(b)0.01 显著性水平下,检验机器不存在差异的假设.

表 9-11

A	68	72	75	42	53
B	72	52	63	55	48
C	60	82	65	77	75
D	48	61	57	64	50
E	64	65	70	68	53

解 ☞ 从每一数据减去一适当数 60,得表 9-12. 那么

$$v = 2356 - \frac{70^2}{5\times 4} = 2356 - 245 = 2111$$

$$v_b = \frac{1}{5}\times 4500 - \frac{70^2}{5\times 4} = 900 - 245 = 655$$

表 9-12

						$\tau_{j.}$	$\tau_{j.}^2$
A	8	12	15	−18	−7	10	100
B	12	−8	3	−5	−2	0	0
C	0	22	6	17	15	60	3600
D	−12	1	−3	4	−10	−20	400
E	4	5	10	8	−7	20	400
	$\sum x_{jk}^2 = 2356$					70	4500

现在构成表 9-13.

表 9-13

方　　差	自　由　度	均　　方	F
处理间 $v_c = 655$	$a-1=4$	$\hat{S}_b^2 = \frac{655}{4} = 163.75$	$F = \frac{\hat{S}_b^2}{\hat{S}_w^2} = 2.25$
处理内 $v_w = 1456$	$a(b-1) = 5(4) = 20$	$\hat{S}_w^2 = \frac{1456}{(5)(4)} = 72.8$	
总的 $v = 2111$	$ab-1=24$		

对自由度为 4,20 的 F 分布,有 $F_{0.95} = 2.87$. 因此在 0.05 显著性水平不能拒绝零假设.当然在 0.01 显著性水平肯定不能拒绝零假设.

不等观测数的修正

9.9 表 9-14 是一家公司制造的三种不同型号的电视显像管所抽样本的寿命(小时),使用直接公式,在(a)0.05,(b)0.01 显著性水平下,检验三种型号间是否存在差异?

表 9-14

样本 1	407	411	409		
样本 2	404	406	408	405	402
样本 3	410	408	406	408	

解 ☞

表 9-15

						总和	平均
样本 1	7	11	9			27	9
样本 2	4	6	8	5	2	25	5
样本 3	10	8	6	8		32	8
	总平均 $\bar{x} = \frac{84}{12} = 7$						

表 9-15 是每一数据减去 400 后获得的,在这个表中列出了行总数和该样本的均值以及总平均,这

样有

$$v=\sum_{j,k}(x_{jk}-\bar{x})^2=(7-7)^2+(11-7)^2+\cdots+(8-7)^2=72$$

$$v_b=\sum_{j,k}(\bar{x}_{j.}-\bar{x})^2=\sum_j n_j(\bar{x}_{j.}-\bar{x})^2$$

$$=3(9-7)^2+5(7-5)^2+4(8-7)^2=36$$

$$v_w=v-v_b=72-36=36$$

也可以从观测值直接计算 v_w,它应是

$$(7-9)^2+(11-9)^2+(9-9)^2+(4-5)^2+(6-5)^2+(8-5)^2+(5-5)^2$$
$$+(2-5)^2+(10-8)^2+(8-8)^2+(6-8)^2+(8-8)^2$$

可以总结成表 9-16 方差分析表.

表 9-16

方差	自由度	均方	F
$v_b=36$	$a-1=2$	$\hat{S}_b^2=\frac{36}{2}=18$	$\frac{\hat{S}_b^2}{\hat{S}_w^2}=\frac{18}{4}$
$v_w=36$	$n-a=9$	$\hat{S}_w^2=\frac{36}{9}=4$	$=4.5$

现在从附录 F,自由度为 2,9 的 $F_{0.95}=4.26$, $F_{0.99}=8.02$. 因此,在 0.05 水平,能够拒绝等均值的假设(即三种型号的管子不存在差异),但是在 0.01 水平下,不能拒绝假设.

9.10　用(24),(25)和(26)式指明的简明公式做习题 9.9 的计算.

解 ☞ 从表 9-15,得

$$n_1=3,\quad n_2=5,\quad n_3=4,\quad n=12,\quad \tau_{1.}=27,\quad \tau_{2.}=25,\quad \tau_{3.}=32,\quad \tau=84$$

因此有

$$v=\sum_{j,k}x_{jk}^2-\frac{\tau^2}{n}=7^2+11^2+\cdots+6^2+8^2-\frac{(84)^2}{12}=72$$

$$v_b=\sum_j\frac{\tau_{j.}^2}{n_j}-\frac{\tau^2}{n}=\frac{(27)^2}{3}+\frac{(25)^2}{5}+\frac{(32)^2}{4}-\frac{(84)^2}{12}=36$$

$$v_w=v-v_b=36$$

方差分析的过程与习题 9.9 一样.

两种方式分组和二因素试验

9.11　表 9-17 给出了用三种不同肥料的地块上播种四种不同植物的每亩收获量. 使用直接公式,在 0.01 水平下,检验(a)肥料是否引起每亩产量的显著差异,(b)不同播种是否引起每亩产量的显著差异.

表 9-17

	播种 I	播种 II	播种 III	播种 IV
肥料 A	4.5	6.4	7.2	6.7
肥料 B	8.8	7.8	9.6	7.0
肥料 C	5.9	6.8	5.7	5.2

解 ☞ 现在计算行的总和和均值,列的总和和均值,以及总平均,列在表 9-18 中.

表 9-18

	播种Ⅰ	播种Ⅱ	播种Ⅲ	播种Ⅳ	行总和	行平均
肥料 A	4.5	6.4	7.2	6.7	24.8	6.2
肥料 B	8.8	7.8	9.6	7.0	33.2	8.3
肥料 C	5.9	6.8	5.7	5.2	23.6	5.9
列总和	19.2	21.0	22.5	18.9	总数 = 81.6	
列平均	6.4	7.0	7.5	6.3	总平均 = 6.8	

v_r = 行平均对总平均的方差

$= 4[(6.2-6.8)^2+(8.3-6.8)^2+(5.9-6.8)^2] = 13.68$

v_c = 列平均对总平均的方差

$= 3[(6.4-6.8)^2+(7.0-6.8)^2+(7.5-6.8)^2+(6.3-6.8)^2] = 2.82$

v = 总方差

$$\begin{aligned}
&=(4.5-6.8)^2+(6.4-6.8)^2+(7.2-6.8)^2+(6.7-6.8)^2\\
&\quad+(8.8-6.8)^2+(7.8-6.8)^2+(9.6-6.8)^2+(7.0-6.8)^2\\
&\quad+(5.9-6.8)^2+(6.8-6.8)^2+(5.7-6.8)^2+(5.2-6.8)^2\\
&=23.08
\end{aligned}$$

v_e = 随机方差 $= v - v_r - v_c = 6.58$

这些结果导出了方差分析表 9-19.

表 9-19

方　差	自 由 度	均　方	F
$v_r = 13.68$	2	$\hat{S}_r^2 = 6.84$	$F = \hat{S}_r^2/\hat{S}_e^2 = 6.24$ 自由度:2,6
$v_c = 2.82$	3	$\hat{S}_c^2 = 0.94$	$F = \hat{S}_c^2/\hat{S}_e^2 = 0.86$ 自由度:3,6
$v_e = 6.58$	6	$\hat{S}_e^2 = 1.097$	
$v = 23.08$	11		

在 0.05 显著性水平,自由度为 2,6 时,$F_{0.95} = 5.14$. 由于 $6.24 > 5.14$,我们能够拒绝行均值是相等的假设,认为在 0.05 显著性水平下,肥料对产量有显著性差异.

由于对应于不同列平均的 F 值小于 1,我们能够认为植物播种对产量没有显著差异.

9.12 使用简明公式,计算习题 9.11 的结果.

解 ☞ 从表 9-18,有

$$\sum_{j,k} x_{jk}^2 = (4.5)^2 + (6.4)^2 + \cdots + (5.2)^2 = 577.96$$

$$\tau = 24.8 + 33.2 + 23.6 = 81.6$$

$$\sum \tau_{j.}^2 = (24.8)^2 + (33.2)^2 + (23.6)^2 = 2274.24$$

$$\sum \tau_{.k}^2 = (19.2)^2 + (21.0)^2 + (22.5)^2 + (18.9)^2 = 1673.10$$

从而

$$v = \sum_{j,k} x_{jk}^2 - \frac{\tau^2}{ab} = 577.96 - 554.88 = 23.08$$

$$v_r = \frac{1}{b}\sum \tau_{j.}^2 - \frac{\tau^2}{ab} = \frac{1}{4}(2274.24) - 554.88 = 13.68$$

$$v_c = \frac{1}{a}\sum \tau_{.k}^2 - \frac{\tau^2}{ab} = \frac{1}{3}(1673.10) - 554.88 = 2.82$$

$$v_e = v - v_r - v_c = 23.08 - 13.68 \quad 2.82 = 6.58$$

和习题 9.11 结果一样.

有重复的两因素试验

9.13　一个制造者希望确定四种型号的机器 A,B,C,D 生产螺钉的效力. 为此, 在一指定星期的每一天中, 对两个班的每一天记录了每台机器生产的次品数, 结果列在表 9-20 中. 在显著性水平 0.05 下, 进行方差分析, 确定(a)机器间是否存在显著差异, (b)班之间是否存在显著差异.

表 9-20

	第一班					第二班				
	星期一	二	三	四	五	星期一	二	三	四	五
A	6	4	5	5	4	5	7	4	6	8
B	10	8	7	7	9	7	9	12	8	8
C	7	5	6	5	9	9	7	5	4	6
D	8	4	6	5	5	5	7	9	7	10

解　☞ 现将数重新组织成表 9-21.

表 9-21

因素 I	因素 II	重　复					
机器	班	星期一	二	三	四	五	总和
A	1	6	4	5	5	4	24
	2	5	7	4	6	8	30
B	1	10	8	7	7	9	41
	2	7	9	12	8	8	44
C	1	7	5	6	5	9	32
	2	9	7	5	4	6	31
D	1	8	4	6	5	5	28
	2	5	7	9	7	10	38
	总和	57	51	54	47	59	268

在这个表中指明了两个主要因素——机器和生产班. 每一个机器有两个生产班. 这一星期的每一天可考虑为每一机器的两个班进行的重复.

表 9-21 中全部数据的总方差为

$$v = 6^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + 7^2 + 10^2 - \frac{268^2}{40} = 1946 - 1795.6 = 150.4$$

为了考虑两个主要因素, 机器和班. 我们限于注意对应于每一因素组合的重复数据的总和. 将它们安排成表 9-22, 这是单一数据的二因素表.

表 9-22

	第一班	第二班	总和
A	24	30	54
B	41	44	85
C	32	31	63
D	28	38	66
总和	125	143	268

表 9-22 的总方差称为亚总方差, 用 v_s 表示为

$$v_s = \frac{24^2}{5} + \frac{41^2}{5} + \frac{32^2}{5} + \frac{28^2}{5} + \frac{30^2}{5} + \frac{44^2}{5} + \frac{31^2}{5} + \frac{38^2}{5} - \frac{268^2}{40}$$

$$= 1861.2 - 1795.6 = 65.6$$

行间方差为

$$v_r = \frac{54^2}{10} + \frac{85^2}{10} + \frac{63^2}{10} + \frac{66^2}{10} - \frac{268^2}{40} = 1846.6 - 1795.6 = 51.0$$

列间方差为

$$v_c = \frac{125^2}{20} + \frac{143^2}{20} - \frac{268^2}{40} = 1803.7 - 1795.6 = 8.1$$

如果现在从亚总方差 v_s 中减去行间方差和列间方差的和($v_r + v_c$),我们就得到行和列间交互项引起的方差

$$v_i = v_s - v_r - v_c = 65.6 - 51.0 - 8.1 = 6.5$$

最后,剩余方差可以认为是随机或误差方差 v_e(这就是说,我们相信这一星期的不同天没有很大的差异).从总方差减去行、列和交互(即亚总方差)的方差和,就获得此值

$$v_e = v - (v_r + v_c + v_i) = v - v_s = 150.4 - 65.6 = 84.8$$

表 9-23 指明了方差分析中的这些值.

表 9-23

方差	自由度	均方	F
行(机器) $v_r = 51.0$	3	$\hat{S}_r^2 = 17.0$	$\frac{17.0}{2.65} = 6.42$
列(班) $v_c = 8.1$	1	$\hat{S}_c^2 = 8.1$	$\frac{8.1}{2.65} = 3.06$
交互项 $v_i = 6.5$	3	$\hat{S}_i^2 = 2.167$	$\frac{2.167}{2.65} = 0.817$
亚总方差 $v_s = 65.6$	7		
随机或剩余 $v_e = 84.8$	32	$\hat{S}_e^2 = 2.65$	
总的 $v = 150.4$	39		

表 9-23 也给出了对应每种方差的自由度.由于表 9-22 中有 4 行,行方差的自由度为 4-1=3,列方差自由度为 2-1=1.为了发现交互项的自由度,注意表 9-22 中有 8 个单元小格,因此总自由度为 8-1=7.由于行引起的有 3 个,列引起的有 1 个,剩下为交互项引起的有 7-(3+1)=3.在原始的表 9-21 中有 40 个单元小格数据,总的自由度是 40-1=39.因此,由随机引起的剩余方差的自由度为 39-7=32.

下一步,我们首先要确定基本因素间是否存在任何显著性的交互项(也就是表 9-22 的行与列间).从表 9-23,看列交互项的 $F = 0.817$.这显示交互项是不显著的,也就是我们不能拒绝本章前面正文中的假设 $H_0^{(3)}$.按照本章正文的叙述,计算行的 F 值为 6.42.由于自由度 3,32 的 $F_{0.95} = 2.90$,我们能够拒绝行有相等均值的假设 $H_0^{(1)}$.这等价于说,在 0.05 显著性水平下,我们认为机器是不等效率的.

对自由度 1,32, $F_{0.95} = 4.15$.由于计算得列的 F 值为 3.06,我们不能拒绝列均值相等的假设 $H_0^{(2)}$.这等价于说,在 0.05 显著性水平下,班之间不存在显著差异.

如果我们采用某些统计学家推荐的,用交互项和随机项合在一起来分析,合并的方差和合并的自由度分别为 $v_i + v_e = 6.5 + 84.8 = 91.3$ 和 $3 + 32 = 35$.这导出合并的均方差为 $91.3/35 = 2.61$.使用此值代替 2.65 作为表 9-23 中的 F 项的分母,对上述结论没有影响.

9.14 如果采用 0.01 显著性水平,解习题 9.13.

解 ☞ 在这一水平,仍然不存在可值得重视的交互项,故能进一步做下去.

对自由度 3,32, $F_{0.99} = 4.47$,行的 F 值计算是 6.42,所以能认为在 0.01 水平机器仍然不是等效的.

对自由度 1,32, $F_{0.99} = 7.51$,列的 F 值是 3.06,所以在 0.01 水平,能认为班之间不存在显著差异.

拉丁方

9.15 一个农夫在一片田地上想检验四种不同肥料 A,B,C,D 的效力，为了消除土壤中肥沃程度的变化引起的误差源，他使用表9-24的拉丁方安排肥料使用. 表中小格的数字是产量(蒲式耳/每英亩). 请进行方差分析，在(a)0.05,(b)0.01 显著性水平下，确定肥料间是否存在显著差异.

表 9-24

A18	C21	D25	B11
D22	B12	A15	C19
B15	A20	C23	D24
C22	D21	B10	A17

表 9-25

					总和
	A18	C21	D25	B11	75
	D22	B12	A15	C19	68
	B15	A20	C23	D24	82
	C22	D21	B10	A17	70
总和	77	74	73	71	295

表 9-26

	A	B	C	D	
总和	70	48	85	92	295

解 ☞ 我们首先求得在表9-25中指示的行和列的总和，也求得表9-26中显示的用每种肥料的小麦产量总和. 然后像通常做的一样，可以得到总方差，行、列及处理的方差，有

$$总方差 = v = 18^2+21^2+25^2+\cdots+10^2+17^2-\frac{295^2}{16}$$

$$= 5769 - 5439.06 = 329.94$$

$$行间方差 = v_r = \frac{75^2}{4}+\frac{68^2}{4}+\frac{82^2}{4}+\frac{70^2}{4}-\frac{295^2}{16}$$

$$= 5468.25 - 5439.06 = 29.19$$

$$列间方差 = v_c = \frac{77^2}{4}+\frac{74^2}{4}+\frac{73^2}{4}+\frac{71^2}{4}-\frac{295^2}{16}$$

$$= 5443.75 - 5439.06 = 4.69$$

$$处理间方差 = v_t = \frac{70^2}{4}+\frac{48^2}{4}+\frac{85^2}{4}+\frac{92^2}{4}-\frac{295^2}{16}$$

$$= 5723.25 - 5439.06 = 284.19$$

方差分析列在表9-27中.

表 9-27

方　差	自由度	均　方	F
行 29.19	3	9.73	4.92
列 4.69	3	1.563	0.79
处理 284.19	3	94.73	47.9
剩余 11.87	6	1.978	
总的 329.94	15		

(a) 由于 $F_{0.95,3,6}=4.76$，在0.05水平下，可以拒绝有相等的行均值的假设. 这就是说，在0.05水平下，从一行到另一行，土壤的肥沃程度存在差异. 由于列的 F 值小于1，我们认为列间的土壤肥沃程度不存在差异. 由于处理的 F 值为 $47.6>4.76$，能够认为肥料间存在差异.

(b) 由于 $F_{0.99,3,6}=9.78$，我们可以在0.01水平下，接收行或列间土壤肥沃程度不存在差异的假设. 然而在0.01水平下，我们仍然必须认为肥料间存在差异.

希腊-拉丁方

9.16 希望确定汽油 A, B, C, D 间在每加仑行驶里数上是否存在差异. 使用 4 个不同的驾驶员, 4 辆汽车和 4 条不同的道路进行试验. 设计该试验.

解 ☞ 由于汽油、驾驶员、汽车和道路有相同的数目 4, 可以使用一个希腊-拉丁方. 假定不同的汽车用行表示, 不同的驾驶员用列表示, 如表 9-28. 现在将不同的汽油 A, B, C, D 随机地安排到行和列中, 要每一行或每一列每一字母仅出现一次. 因此每一驾驶员有机会驾驶每一辆汽车和使用每一型号的汽油(没有一辆汽车用同一种汽油被驾驶两次).

现在再随机安排 4 条道路的使用, 记为 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. 限定它们有与对拉丁字母同样的要求. 因此, 每个驾驶员将有机会沿每一条路驾驶. 一个可行的安排见表 9-28.

表 9-28

汽车 \ 驾驶员	1	2	3	4
1	B_γ	A_β	D_δ	C_α
2	A_δ	B_α	C_γ	D_β
3	D_α	C_δ	B_β	A_γ
4	C_β	D_γ	A_α	B_δ

9.17 假设进行习题 9.16 的试验, 每加仑的行驶里数见表 9-29. 在 0.05 水平, 使用方差分析确定是否存在显著性差异?

解 ☞ 首先求得行和列的总和, 见表 9-30.

表 9-29

汽车 \ 驾驶员	1	2	3	4
1	$B_\gamma 19$	$A_\beta 16$	$D_\delta 16$	$C_\alpha 14$
2	$A_\delta 15$	$B_\alpha 18$	$C_\gamma 11$	$D_\beta 15$
3	$D_\alpha 14$	$C_\delta 11$	$B_\beta 21$	$A_\gamma 16$
4	$C_\beta 16$	$D_\gamma 16$	$A_\alpha 15$	$B_\delta 23$

表 9-30

					总和
	$B_\gamma 19$	$A_\beta 16$	$D_\delta 16$	$C_\alpha 14$	65
	$A_\delta 15$	$B_\alpha 18$	$C_\gamma 11$	$D_\beta 15$	59
	$D_\alpha 14$	$C_\delta 11$	$B_\beta 21$	$A_\gamma 16$	62
	$C_\beta 16$	$D_\gamma 16$	$A_\alpha 15$	$B_\delta 23$	70
总和	64	61	63	68	256

然后对每一个拉丁字母和希腊字母求总和, 有

$$A\text{ 总和}: 15 + 16 + 15 + 16 = 62$$
$$B\text{ 总和}: 19 + 18 + 21 + 23 = 81$$
$$C\text{ 总和}: 16 + 11 + 11 + 14 = 52$$
$$D\text{ 总和}: 14 + 16 + 16 + 15 = 61$$
$$\alpha\text{ 总和}: 14 + 18 + 15 + 14 = 61$$
$$\beta\text{ 总和}: 16 + 16 + 21 + 15 = 68$$
$$\gamma\text{ 总和}: 19 + 16 + 11 + 16 = 62$$
$$\delta\text{ 总和}: 15 + 11 + 16 + 23 = 65$$

现在用简明公式计算各项对应的方差:

行: $$\frac{65^2}{4} + \frac{59^2}{4} + \frac{62^2}{4} + \frac{70^2}{4} - \frac{256^2}{16} = 4112.50 - 4096 = 16.50$$

列: $$\frac{64^2}{4} + \frac{61^2}{4} + \frac{63^2}{4} + \frac{68^2}{4} - \frac{256^2}{16} = 4102.50 - 4096 = 6.50$$

汽油: (A, B, C, D) $$\frac{62^2}{4} + \frac{81^2}{4} + \frac{52^2}{4} + \frac{61^2}{4} - \frac{256^2}{16} = 4207.50 = 4096 = 111.50$$

道路: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ $$\frac{61^2}{4} + \frac{68^2}{4} + \frac{62^2}{4} + \frac{65^2}{4} - \frac{256^2}{16} = 4103.50 - 4096 = 7.50$$

总方差是

$$19^2+16^2+16^2+\cdots+15^2+23^2-\frac{256}{16}=4244-4096=148.00$$

所以误差引起的方差是

$$148.00-16.50-6.50-111.50-7.50=6.00$$

这些结果列在表 9-31 方差分析表中. 自由度的总数是对每一 $n\times n$ 方形为 n^2-1. 行、列、拉丁字母、希腊字母每个有自由度 $n-1$. 因此, 误差的自由度为 $n^2-1-4(n-1)=(n-1)(n-3)$. 在我们的情形 $n=4$.

由于 $F_{0.95,3,3}=9.28$ 和 $F_{0.99,3,3}=29.5$, 因此在 0.05 水平, 我们能够拒绝汽油是相同的假设. 但是在 0.01 水平, 不能拒绝.

表 9-31

方　差	自 由 度	均　方	F
行(汽车) 16.50	3	5.500	$\frac{5.500}{2.000}=2.75$
列(驾驶员) 6.50	3	2.167	$\frac{2.167}{2.000}=1.08$
汽油 (A,B,C,D) 111.50	3	37.167	$\frac{37.167}{2.000}=18.6$
道路 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ 7.50	3	2.500	$\frac{2.500}{2.000}=1.25$
误差 6.00	3	2.000	
总的 148.00	15		

综合问题

9.18 证明本章(15)式中 $\sum\alpha_j=0$.

证明 ☞ 处理总体的平均数给定为 $\mu_j=\mu+\alpha_j$, 因此

$$\sum_{j=1}^{a}\mu_j=\sum_{j=1}^{a}\mu+\sum_{j=1}^{a}\alpha_j=a\mu+\sum_{j=1}^{a}\alpha_j=\sum_{j=1}^{a}\mu_j+\sum_{j=1}^{a}\alpha_j$$

使用定义 $\mu=\left(\sum\mu_j\right)/a$ 即得 $\sum\alpha_j=0$.

9.19 求本章中(a)方程式(17), (b)方程式(16).

解 ☞ (a)按定义, 有

$$V_w=\sum_{j,k}(X_{jk}-\bar{X}_j)^2=b\sum_{j=1}^{a}\left[\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b}(X_{jk}-\bar{X}_j)^2\right]=b\sum_{j=1}^{a}S_j^2$$

式中 S_j^2 是第 j 个处理的样本方差, 定义见第五章(15)式. 由于样本容量是 b, 使用第五章的(16)式, 有

$$E(V_w)=b\sum_{j=1}^{a}E(S_j^2)=b\sum_{j=1}^{a}\left(\frac{b-1}{b}\sigma^2\right)=a(b-1)\sigma^2$$

(b)按定义, 由于 $\bar{X}=\frac{\sum_j\bar{X}_{j.}}{a}$, 有

$$V_b=b\sum_{j=1}^{a}(\bar{X}_{j.}-\bar{X})^2=b\sum_{j=1}^{a}\bar{X}_j^2-2b\bar{X}\sum_{j=1}^{a}\bar{X}_{j.}+ab\bar{X}^2=b\sum_{j=1}^{a}\bar{X}_j^2-ab\bar{X}^2$$

省略和号的上下角标, 有

(1) $$E(V_b)=b\sum E(\bar{X}_{j.}^2)-abE(\bar{X})^2$$

现在对任一随机变量 U, 有 $E(U^2)=\mathrm{Var}(U)+[E(U)]^2$. 因此

(2) $$E(\bar{X}_{j.}^2)=\mathrm{Var}(\bar{X}_{j.})+[E(\bar{X}_{j.})]^2$$

(3) $$E(\bar{X}^2)=\mathrm{Var}(\bar{X})+[E(\bar{X})]^2$$

但是由于处理总体是正态的,具有均值 μ_j 和共同的方差 σ^2,从第五章定理 5-4 可得

(4) $$\mathrm{Var}(\bar{X}_{j.})=\frac{\sigma^2}{b}$$

(5) $$\mathrm{Var}(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{ab}$$

(6) $$E(\bar{X}_{j.})=\mu_j=\mu+\alpha_j$$

(7) $$E(\bar{X})=\mu$$

使用上面的(2)到(7),加上习题 9.18 的结果,则上面的(1)为

$$\begin{aligned}E(V_b)&=b\sum\left[\frac{\sigma^2}{b}+(\mu+\alpha_j)^2\right]-ab\left[\frac{\sigma^2}{ab}+\mu^2\right]\\&=a\sigma^2+b\sum(\mu+\alpha_j)^2-\sigma^2-ab\mu^2\\&=(a-1)\sigma^2+ab\mu^2+2b\mu\sum\alpha_j+b\sum\alpha_j^2-ab\mu^2\\&=(a-1)\sigma^2+b\sum\alpha_j^2\end{aligned}$$

9.20　证明本章定理 9-1.

解　如习题 9.19(a)中显示的

$$V_w=b\sum_{j=1}^{a}S_j^2\quad 或\quad \frac{V_w}{\sigma^2}=\sum_{j=1}^{a}\frac{bS_j^2}{\sigma^2}$$

式中 S_j^2 是从第 j 个处理中抽出的容量为 b 的样本的方差.按第五章定理 5-6, bS_j^2/σ^2 具有自由度 $b-1$ 的卡方分布.又由于方差 S_j^2 是相互独立的.从第四章的定理 4-4 则可得结论: V_w/σ^2 具有自由度 $a(b-1)$的卡方分布.

9.21　在习题 9.13 中,假定重复间不存在显著差异,即一星期的不同天间无差异.在(a) 0.05,(b)0.01 显著水平下能支持这一结论吗?

解　如果存在由重复引起的方差,这就归结为表 9-23 中的"剩余"或"随机误差", $v_e=84.8$.为了发现由重复引起的方差,我们使用表 9-21 中的列总和,得到

$$\begin{aligned}v_{rep}&=\frac{57^2}{8}+\frac{51^2}{8}+\frac{54^2}{8}+\frac{47^2}{8}+\frac{59^2}{8}-\frac{268^2}{40}\\&=1807-1795.6=11.4\end{aligned}$$

由于有 5 个复制品,与这一方差相连的自由度为 $5-1=4$.减去复制品引起的方差后,剩余方差为 $v_e'=84.8-11.4=73.4$.其他的方差与表 9-23 中的相同.考虑到重复的方差分析表为表 9-32.从表中可看到重复的 F 值为 1.09.但对自由度 4,28, $F_{0.95}=2.71$.故在 0.05 水平下(也在 0.01 水平下),不存在由重复引起的显著方差,也就是一星期的各天间差异是不显著的.关于机器和生产班的结论与习题 9.13 是一样的.

表 9-32

方　差	自 由 度	均　方	F
行(机器) $v_r=51.0$	3	17.0	$\frac{17.0}{2.621}=6.49$
列(班) $v_c=8.1$	1	8.1	$\frac{8.1}{2.621}=3.05$
重复(星期的天) $v_{rep}=11.4$	4	2.85	$\frac{2.85}{2.621}=1.09$
交互项 $v_i=6.5$	3	2.167	$\frac{2.167}{2.621}=0.827$
随机或剩余 $v_e'=73.4$	28	2.621	
总的 $v=150.4$	39		

9.22　描述如何进行三方式分组或三因素试验的方差分析技术(每一试验有单一数据).列出

此情况下的方差分析表.

解 ☞ 我们假定分组有 A 分群记为 $A_1,\cdots,A_a$，B 分群记为 $B_1,\cdots,B_b$，C 分群记为 $C_1,\cdots,C_c$. 在 A_j，B_k 和 C_l 处的值记为 x_{jkl}. 值 $\bar{x}_{jk.}$ 为 A_j 和 B_k 保持固定时对 C 分群的平均值，类似地有 $\bar{x}_{j.l}$ 和 $\bar{x}_{.kl}$. 值 $\bar{x}_{j..}$ 是 A_j 固定时对 B 和 C 分群的平均，等等. 最后总平均记为 $\bar{x}$.

总方差给定为

$$v = \sum_{j,k,l}(x_{jkl} - \bar{x})^2 \tag{1}$$

他可以分解成表 9-33 中列出的 7 个方差. 这些方差是同型分群间的方差和不同型分群间的方差(交互项). 全体分群间的交互项仍像前面一样称为剩余或随机方差.

上面(1)式分解的 7 个方差为

$$v = v_A + v_B + v_C + v_{AB} + v_{BC} + v_{CA} + v_{ABC}$$

式中

$$v_A = bc\sum_j(\bar{x}_{j..} - \bar{x})^2, \quad v_B = ca\sum_k(\bar{x}_{.k.} - \bar{x})^2, \quad v_C = ab\sum_l(\bar{x}_{..l} - \bar{x})^2$$

$$v_{AB} = c\sum_{j,k}(\bar{x}_{jk.} - \bar{x}_{j..} - \bar{x}_{.k.} + \bar{x})^2$$

$$v_{BC} = a\sum_{k,l}(\bar{x}_{.kl} - \bar{x}_{.k.} - \bar{x}_{..l} + \bar{x})^2$$

$$v_{CA} = b\sum_{j,l}(\bar{x}_{j.l} - \bar{x}_{..l} - \bar{x}_{j..} + \bar{x})^2$$

$$v_{ABC} = \sum_{j,k,l}(x_{jkl} - \bar{x}_{jk.} - \bar{x}_{j.l} - \bar{x}_{.kl} + \bar{x}_{j..} + \bar{x}_{.k.} + \bar{x}_{..l} - \bar{x})^2$$

表 9-33

方　差	自　由　度	均　方	F
v_A(A 分群间)	$a-1$	$\hat{S}_A^2 = \dfrac{v_A}{a-1}$	$\hat{S}_A^2/\hat{S}_{ABC}^2$ $a-1$, $(a-1)(b-1)(c-1)$自由度
v_B(B 分群间)	$b-1$	$\hat{S}_B^2 = \dfrac{v_B}{b-1}$	$\hat{S}_B^2/\hat{S}_{ABC}^2$ $b-1$, $(a-1)(b-1)(c-1)$自由度
v_C(C 分群间)	$c-1$	$\hat{S}_C^2 = \dfrac{v_C}{c-1}$	$\hat{S}_C^2/\hat{S}_{ABC}^2$ $c-1$, $(a-1)(b-1)(c-1)$自由度
v_{AB}(A 和 B 分群间)	$(a-1)(b-1)$	$\hat{S}_{AB}^2 = \dfrac{v_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$\hat{S}_{AB}^2/\hat{S}_{ABC}^2$ $(a-1)(b-1)$, $(a-1)(b-1)(c-1)$自由度
v_{BC}(B 和 C 分群间)	$(b-1)(c-1)$	$\hat{S}_{BC}^2 = \dfrac{v_{BC}}{(b-1)(c-1)}$	$\hat{S}_{BC}^2/\hat{S}_{ABC}^2$ $(b-1)(c-1)$, $(a-1)(b-1)(c-1)$自由度
v_{CA}(C 和 A 分群间)	$(c-1)(a-1)$	$\hat{S}_{CA}^2 = \dfrac{v_{CA}}{(c-1)(a-1)}$	$\hat{S}_{CA}^2/\hat{S}_{ABC}^2$ $(c-1)(a-1)$, $(a-1)(b-1)(c-1)$自由度
v_{ABC}(A, B 和 C 分群间)	$(a-1)(b-1)(c-1)$	$\hat{S}_{ABC}^2 = \dfrac{v_{ABC}}{(a-1)(b-1)(c-1)}$	
v(总的)	$abc-1$		

补充习题

一方式分组或一因素试验

9.23　进行一个试验,确定五种不同小麦 A,B,C,D,E 的产量.每一品种安排在4块小地块上,产量(蒲式耳/英亩)列在表9-34中.假定各小地块有类似的肥沃程度,而品种是随机地安排到小地块上的.在(a)0.05,(b)0.01显著性水平下,确定产量间是否存在显著差异?

表 9-34

A	20	12	15	19
B	17	14	12	15
C	23	16	18	14
D	15	17	20	12
E	21	14	17	18

表 9-35

A	33	38	36	40	31	35
B	32	40	42	38	30	34
C	31	37	35	33	34	30
D	29	34	32	30	33	31

9.24　一家公司希望检验四种不同型号 A,B,C,D 的轮胎.行驶确定的轮胎的寿命列在表9-35中(单位千里).每种型号被随机地安装到6个类似的汽车处.在(a)0.05,(b)0.01水平下,确定轮胎间是否存在差异?

9.25　一个教员希望检验三种不同的教学方法Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ.为此,5个学生的3个群被随机地选定,每一群采用不同的教法.然后对全部学生统一考试,成绩列在表9-36中.在(a)0.05,(b)0.01水平下,确定教学法之间是否存在显著差异?

表 9-36

方法Ⅰ	75	62	71	58	73
方法Ⅱ	81	85	68	92	90
方法Ⅲ	73	79	60	75	81

不等观测数的修正

9.26　表9-37列出了每加仑汽油的行驶里数,它们是五种不同品牌的汽油用于类似的汽车的记录.在(a)0.05,(b)0.01水平下,检验不同品牌间是否存在显著差异?

表 9-37

品牌 A	12	15	14	11	15
品牌 B	14	12	15		
品牌 C	11	12	10	14	
品牌 D	15	18	16	17	14
品牌 E	10	12	14	12	

表 9-38

数学	72	80	83	75	
自然	81	74	77		
英语	88	82	90	87	80
经济	74	71	77	70	

9.27　在一个学期中,一个学生在不同的科目中得到的成绩列在表9-38中.在(a)0.05,(b)0.01水平下,检验这些科目间他的成绩是否有显著差异?

二方式分组或二因素试验

9.28　一家公司由三个操作员使用三台机器生产一种物品.公司希望知道(a)在操作员间,(b)在机器间是否存在差异.进行一个试验,确定每一操作员用每一台机器一天中能生产多少个物品.结果列在表9-39中,使用0.05显著性水平提供希望的信息.

表 9-39

	操作员 1	操作员 2	操作员 3
机器 A	23	27	24
机器 B	34	30	28
机器 C	28	25	27

9.29 在 0.01 显著水平下,解习题 9.28.

9.30 四种不同型号的谷物种子种在五个区组中,每个区组有 4 小块地,随机地安排四种型号.每英亩产量(蒲式耳)列在表 9-40 中.在 0.05 水平下,检验是否在(a)土壤不同(即五个区组),(b)谷物型号方面有显著变化?

表 9-40

		谷物型号			
		Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
区组	A	12	15	10	14
	B	15	19	12	11
	C	14	18	15	12
	D	11	16	12	16
	E	16	17	11	14

9.31 在 0.01 显著水平下,解习题 9.30.

9.32 假定在习题 9.24 中,对每一个品牌的轮胎的第一个观测值是使用一种指定类型的汽车,第二个观测值是使用第二种指定类型的汽车,等等.在 0.05 水平下,检验(a)在轮胎品牌间,(b)在汽车类型间是否存在差异?

9.33 在 0.01 显著水平下,解习题 9.32.

9.34 假定习题 9.25 中,每一教学法的第一个数据对应的是一个指定学校的学生,第二个数据是另一学校的学生,等等.在 0.05 水平下,检验(a)教学法,(b)学校是否存在差异?

9.35 进行一个试验,检验在美国,成年女学生的头发颜色和身高是否对学习成绩有影响.表 9-41 记录了一些数,它们是这些等级中处于最好的 10% 中的人数.在 0.05 水平,分析这一试验.

表 9-41

	红发	金发	浅黑发
高	75	78	80
中等	81	76	79
矮	73	75	77

9.36 在 0.01 水平,解习题 9.35.

有重复的二因素试验

9.37 假定习题 9.23 中的试验是在美国南部进行的,表 9-34 的列指示的四种不同类型的肥料.同时在美国的西部进行了类似的试验,产量结果见表 9-42.在 0.05 水平,检验是否在(a)肥料间,(b)地区间存在差异?

表 9-42

A	16	18	20	23
B	15	17	16	19
C	21	19	18	21
D	18	22	21	23
E	17	18	24	20

9.38　在 0.01 水平,解习题 9.37.

9.39　4 个不同的操作员在两种不同型号的机器Ⅰ和Ⅱ上工作,一星期中各天的生产物品数列在表 9-43 中.在 0.05 水平,确定(a)操作员间,(b)机器间是否存在显著差异.

表 9-43

	机器Ⅰ					机器Ⅱ				
	星期一	二	三	四	五	星期一	二	三	四	五
操作员 A	15	18	17	20	12	14	16	18	17	15
操作员 B	12	16	14	18	11	11	15	12	16	12
操作员 C	14	17	18	16	13	12	14	16	14	11
操作员 D	19	16	21	23	18	17	15	18	20	17

拉丁方

9.40　进行一个试验,检验四种不同肥料(A,B,C,D)的处理对谷物产量的影响.而土壤在两个垂直的方向上有变化,采用了表 9-44 的拉丁方,表中的数字是每单位面积上的谷物产量.在 0.01 水平,检验在(a)肥料间,(b)土壤变化间不存在差异的假设.

表 9-44

C 8	A10	D12	B11
A14	C12	B11	D15
D10	B14	C16	A10
B 7	D16	A14	C12

9.41　在 0.05 水平,解习题 9.40.

9.42　参考习题 9.35,假定我们引进一个另外的因素,学生生于美国的东部(E),中部(M)或西部(W);如表 9-45 所示.在 0.05 水平,确定(a)身高间,(b)头发颜色间,(c)出生地间,女学生的学习成绩是否存在显著差异?

表 9-45

E75	W78	M80
M81	E76	W79
W73	M75	E77

希腊-拉丁方

9.43　为了制造一种优质的儿童食品,往基本的配方中加入两种化学添加剂,每种有四个不同的量.今用 A,B,C,D 表示第一种添加剂的不同量,用 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 表示第二种添加剂的量.安排由四种不同体重 W_1, W_2,W_3,W_4 和四种不同人种 S_1,S_2,S_3,S_4 分群的小孩尝试.单位时间过后的体重增加值见表 9-46 的希腊-拉丁方.在 0.05 显著性水平,进行该试验的方差分析.叙述所能得到的结论.

表 9-46

	W	W_2	W_3	W_4
S_1	$C_\gamma 8$	$B_\beta 6$	$A_\alpha 5$	$D_\delta 6$
S_2	$A_\delta 4$	$D_\alpha 3$	$C_\beta 7$	$B_\gamma 3$
S_3	$D_\beta 5$	$A_\gamma 6$	$B_\delta 5$	$C_\alpha 6$
S_4	$B_\alpha 6$	$C_\delta 10$	$D_\gamma 10$	$A_\beta 8$

9.44 有四家不同公司 C_1, C_2, C_3, C_4，每家制造四种不同型号的缆绳 T_1, T_2, T_3, T_4. 4 个操作员 A, B, C, D 使用四台不同的机器 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$，测量缆绳的强度. 获得的平均强度列在表 9-47 的希腊-拉丁方中. 在 0.05 水平进行方差分析，叙述所能得到的结论.

表 9-47

	C_1	C_2	C_3	C_4
T_1	$A_\beta 164$	$B_\gamma 181$	$C_\alpha 193$	$D_\delta 160$
T_2	$C_\delta 171$	$D_\alpha 162$	$A_\gamma 183$	$B_\beta 145$
T_3	$D_\gamma 198$	$C_\beta 221$	$B_\delta 207$	$A_\alpha 188$
T_4	$B_\alpha 157$	$A_\delta 172$	$D_\beta 166$	$C_\gamma 136$

综合问题

9.45 表 9-48 给出的资料是分别由 A, B, C 和 D 化学处理作用于铁的累积结果，在(a)0.05，(b)0.01 水平，确定处理间是否有显著差异？

表 9-48

A	3	5	4	4
B	4	2	3	3
C	6	4	5	5

表 9-49

高	110	105	118	112	90	
矮	95	103	115	107		
中等	108	112	93	104	96	102

9.46 测量具有高、矮、中等特征的成年男学生的智商. 结果列在表 9-49 中. 在(a)0.05，(b)0.01 水平，确定不同身高间智商分是否存在显著差异？

9.47 进行一项试验，确定不同智商的老工人与非老工人执行工作是否优良. 获得表 9-50 列出的分值. 在 0.05 水平，确定分值的差异是否是由(a)工作资格的状态，(b)智商引起的.

表 9-50

	高智商	中等智商	低智商
老工人	90	81	74
非老工人	85	78	70

9.48 在 0.01 水平，解习题 9.47.

9.49 表 9-51 列出了来自一个县的不同地区. 有不同智商的大学生样本的测验得分. 在 0.05 显著性水平，分析这张表并叙述你的结论.

表 9-51

	高智商	中等智商	低智商
东部	88	80	72
西部	84	78	75
南部	86	82	70
北部和中部	80	75	79

9.50 在 0.01 水平，解习题 9.49.

9.51 假定习题 9.45 的表 9-48 对美国东北部是保持的，而西部对应的结果列在表 9-52 中，在 0.05 水平下，确定是否存在由(a)化学物质，(b)地区引起的差异？

表 9-52

A	5	4	6	3
B	3	4	2	3
C	5	7	4	6

9.52 参考习题 9.23 和 9.37，假定在美国的东北部进行了附加的试验，结果列在表 9-53 中，在 0.05 水平下，检验在(a)肥料间，(b)三个地区间是否存在差异？

表 9-53

A	17	14	18	12
B	20	10	20	15
C	18	15	16	17
D	12	11	14	11
E	15	12	19	14

9.53 在 0.01 水平，解习题 9.52.

9.54 对表 9-54 的拉丁方，在 0.05 水平进行方差分析并叙述结论.

表 9-54

	因素 1		
因素 2	*B*16	*C*21	*A*15
	*A*18	*B*23	*C*14
	*C*15	*A*18	*B*12

9.55 对表 9-55 的希腊-拉丁方，在 0.05 水平进行方差分析，并叙述结论.

表 9-55

	因素 1			
因素 2	A_γ 6	B_β12	C_δ 4	D_α18
	B_δ 3	A_α 8	D_γ15	C_β14
	D_β15	C_γ20	B_α 9	A_δ 5
	C_α16	D_δ 6	A_β17	B_γ 7

补充习题答案

9.23 在两个水平，产量间均存在显著差异.

9.24 在任一水平，轮胎间均不存在显著差异.

9.25 在 0.05 水平，教学法间存在显著差异，但在 0.01 水平，不存在显著差异.

9.26 在 0.05 水平，品牌间存在显著差异，但在 0.01 水平，不存在显著差异.

9.27 在两个水平，分数间均存在显著差异.

9.28 在操作员或机器间不存在显著差异.

9.29 在操作员或机器间不存在显著差异.

9.30 在 0.05 水平，谷物品种间存在显著差异，但土壤间，不存在显著差异.

9.31 在 0.01 水平，谷物品种或土壤间均不存在显著差异.

9.32 在 0.05 水平，轮胎和汽车间均存在显著差异.

9.33 在 0.01 水平，轮胎和汽车间均不存在显著差异.

9.34 在 0.05 水平，教学法间存在显著差异，但学校间不存在显著差异.

9.35 头发颜色和身高间均不存在显著差异.

9.36 同习题 9.35 的回答.

9.37 在 0.05 水平，地区间存在显著差异，但肥料间不存在显著差异.

9.38 在 0.01 水平，地区和肥料间均不存在显著差异.

9.39 操作员间存在显著差异，但机器间不存在显著差异.

9.40 肥料和土壤间均不存在显著差异.

9.41 同习题 9.40 的回答.

9.42 在学习成绩间不存在由身高、头发颜色、出生地引起的显著差异.

9.43 在人种和第一种化学添加剂量间存在显著差异,但无其他的显著差异.

9.44 缆绳间存在显著差异,但不存在由操作员、机器或公司引起的显著差异.

9.45 在两个水平均不存在处理间的显著差异.

9.46 在两个水平均不存在智商间的显著差异.

9.47 在 0.05 水平,考查分数间存在由工人资格状态和智商引起的显著差异.

9.48 在 0.01 水平,考查分数在工人资格状态间不存在显著差异,但由智商引起的差异是显著的.

9.49 学生的测验得分不存在县的地区间的显著差异,在智商间存在显著差异.

9.50 同习题 9.49 的回答.

9.51 在 0.05 水平,存在由化学物质和地区引起的显著差异.

9.52 存在由地区引起的显著差异,但不存在肥料引起的显著差异.

9.53 不存在由地区或肥料引起的显著差异.

9.54 不存在由因素 1、因素 2 或处理 A,B,C 引起的显著差异.

9.55 不存在由因素或处理引起的显著差异.

第十章 非参数检验

引言

在前面的章节中,多数假设检验和显著性(或决策规则)的考虑要求各种总体分布的假定,而样本来自这样的总体.例如,在第五章中,经常要求总体分布是正态或接近正态.

在实际状态中,如此的假定可能不能满足,或者对它们的应用存在怀疑,如有时总体可能是高度偏斜的.因此,统计学家讨论了各种检验和方法,它们与总体分布及相连的参数没有关系.这些称为非参数检验.

非参数检验可用作一些更复杂的检验,它是这些检验的简洁代替.在处理非数值资料中特别有用,比如在消费者按喜好对谷物或其他产品进行排队时.

符号检验

考虑表 10-1,该表显示了有缺陷的螺钉的数目,这些螺钉是两台不同类型的机器(Ⅰ和Ⅱ)在连续的 12 天中制造的,并且假定机器每天有同样的产量.我们希望检验机器间不存在差异的假定 H_0. 所观测到的它们生产的有缺陷螺钉数目间的差异纯粹是随机的,也就是说这些样本都来自同一总体.

表 10-1

日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
机器Ⅰ	47	56	54	49	36	48	51	38	61	49	56	52
机器Ⅱ	71	63	45	64	50	55	42	46	53	57	75	60

在这种成对样本的情形,符号检验提供了一种简单非参数检验.这个检验对每一天取有缺陷螺钉数之间的差,而且仅记录差的符号.例如,对第一天,有 47 − 71,为负数,这样从表 10-1 获得一个符号的序列

$$- - + - - - + - + - - - \qquad (1)$$

(3 个加号和 9 个减号).现在如果仅是要得到"+"或"−",我们应希望各有 6 个.这个 H_0 的检验与在 12 次抛掷中有 3 个正面(+)和 9 个反面(−)时检验硬币是否匀称是等价的.这就涉及第四章的二项分布.习题 10.1 说明在 0.05 显著性水平用双侧检验不能拒绝 H_0,也就是说在这一水平,机器间不存在差异.

注 1 如果在某一天机器生产的有缺陷螺钉数相同,在序列(1)中会出现差为零.这时我们可以略去这样的样本值,使用 11 个而不是 12 个观测数.

注 2 可以使用正态近似二项分布.进行连续性修正(见习题 10.2).

虽然符号检验对成对样本特别地有用,如表 10-1. 但它也能用于涉及单个样本的问题(见习题 10.3 和 10.4).

曼-魏特莱(Mann-Whitney) U 检验

考虑表 10-2,它列出了由两种不同的合金制做的缆绳Ⅰ和Ⅱ的强度.在这个表中有两个样本,合金Ⅰ的缆绳有 8 条,合金Ⅱ的缆绳有 10 条.

表 10-2

合金Ⅰ				合金Ⅱ				
18.3	16.4	22.7	17.8	12.6	14.1	20.5	10.7	15.9
18.9	25.3	16.1	24.2	19.6	12.9	15.2	11.8	14.7

我们应该看到,决定样本间是否存在差异等价于样本是否来自同一总体.虽然这一问题能用第七章的 t 检验,但称为 Mann-Whitney U 检验或简称 U 检验的一个非参数检验是有用的.这个检验包含下列步骤:

步骤 1　混合全部样本值,将它们从小到大排列,对全部这些值指定排列的秩(这里是 1 到 18).如果有两个或更多的样本值相同(也就是存在结源,简称结),则这些样本值每一个被指定一个相同的平均秩,即原应指定的那些秩的平均.例如,如果表 10-2 中的数据 18.9 改成 18.3,则表中有两个 18.3,它们在排列中的秩为 12 和 13,这样这两值的每一个指定的秩为 $\frac{1}{2}(12+13)=12.5$.

步骤 2　求每一样本对应的秩的和,记为 R_1 和 R_2,相应的样本容量为 N_1 和 N_2.为方便,选 N_1 为较小容量的一个,所以 $N_1 \leqslant N_2$.秩和 R_1 和 R_2 间的显著差异蕴含着样本间的显著差异.

步骤 3　使用统计量

$$U = N_1N_2 + \frac{N_1(N_1+1)}{2} - R_1 \tag{2}$$

检验秩和之间的差异.U 的抽样分布是对称的,其均值和方差分别有公式:

$$\mu_U = \frac{N_1N_2}{2}, \quad \sigma_U^2 = \frac{N_1N_2(N_1+N_2+1)}{12} \tag{3}$$

当 N_1 和 N_2 两者均至少等于 8 时,可以证明 U 的分布接近正态.这样

$$z = \frac{U-\mu_U}{\sigma_U} \tag{4}$$

具有期望 0 和方差 1 的正态分布.使用附录 C,我们能决定样本是否有显著差异.习题 10.5 显示在 0.05 水平这些缆绳间有显著差异.

注 3　着眼于样本Ⅱ,统计量为

$$U = N_1N_2 + \frac{N_2(N_2+1)}{2} - R_2 \tag{5}$$

它与(2)的统计量有相同的抽样分布,期望和方差亦为(3)式.如果用 U_1 和 U_2 分别记由(2)式和(5)式对应的统计量,则有

$$U_1 + U_2 = N_1N_2 \tag{6}$$

也有

$$R_1 + R_2 = \frac{N(N+1)}{2} \tag{7}$$

式中 $N = N_1 + N_2$.式(7)可用于检查计算结果.

注 4　当全部样本值按升序排列时,(2)式的统计量是样本 1 中的值超前于样本Ⅱ中的值的总次数.这提供了 U 的另一种计算方法.

葛斯卡尔-华里斯(Kruskal-Wallis)H 检验

U 检验是决定两个样本是否来自同一总体的一个非参数检验,将其推广到 k 样本提供了 Kruskal-Wallis H 检验,简称 H 检验.

这个检验可以这样描述:假定 k 个样本的容量为 $N_1, N_2, \cdots, N_k$,总容量 $N = N_1 + N_2 + \cdots + N_k$.又假定全部样本的数据放在一起排列,这 k 个样本的排列秩的总和分别为 R_1,

$R_2, \cdots, R_k$.定义统计量

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\sum_{j=1}^{k}\frac{R_j^2}{N_j} - 3(N+1) \tag{8}$$

当 $N_1, N_2, \cdots, N_k$ 全部大于等于 5 时, H 的抽样分布非常接近 $k-1$ 个自由度的卡方分布.

H 检验提供了在一种方式分组或一因素试验的方差分析中的一种非参数方法.可以做出进一步的推广.

对结进行修正的 H 检验

当样本资料中的观测值存在太多的结时,用(8)式给出的统计量会比它应有的值偏小.这时对(8)式的统计量除上一个修正因子

$$1 - \frac{\sum(T^3 - T)}{N^3 - N} \tag{9}$$

H 的修正值记为 H_c.式中的 T 是对应每一观测值的结源的个数,求和是对全部观测进行.如果不存在结,则 $T=0$,因子(9)为 1,所以无需修正.在实践中这一修正经常被忽略(也就是修正并不足以保证要改变决策).

随机性的游程检验

虽然本书中已多次提到随机这个词(如随机抽样和随机抛掷一枚硬币),但前面各章对随机没有给出任何检验.这里对随机性提供一个非参数检验,使用游程理论.

为了明了什么是游程,考虑两个符号 a 和 b 组成的一个序列,如

$$a\,a\mid b\,b\,b\mid a\mid b\,b\mid a\,a\,a\,a\,a\mid b\,b\,b\mid a\,a\,a\,a\mid \tag{10}$$

在抛掷硬币时, a 可以是表示正面, b 表示反面.在抽取一机器生产的螺钉时, a 可以表示次品, b 表示非次品.

一个游程定义成两种不同符号或无符号(如头和尾)之间包含的同一符号的一个集合.在序列(10)中,从左到右用竖线指示了第一个游程包含两个 a,类似地第二个游程包含三个 b,第三个包含一个 a,等等.共有七个游程.

显然,随机性和游程的个数间存在某种关系.比如,序列

$$a\mid b\mid a\mid b\mid a\mid b\mid a\mid b\mid a\mid b\mid a\mid b \tag{11}$$

存在一种周期模式,其中从 a 到 b 再返回到 a,等等.我们很难相信它是随机的.这时,我们有太多的游程(事实上,对给定的 a 和 b 的游程数有最大的可能数目).

另一方面,对序列

$$a\,a\,a\,a\,a\,a\mid b\,b\,b\,b\mid a\,a\,a\,a\,a\mid b\,b\,b\mid \tag{12}$$

似乎存在一种倾向模式,其中 a 和 b 集群在一起.这时,有太少的游程,不能认为序列是随机的.

如果序列存在太多的或太少的游程,应被考虑为非随机的,否则认为是随机的.量化这一想法.假定我们对全部 N 个符号,其中 N_1 个 a 和 N_2 个 b($N = N_1 + N_2$),构成一切可能的序列.全部这些序列的总集合为我们提供了抽样分布.每一序列有一个游程个数,记为 V.这样我们引出了统计量 V 的抽样分布.可以证明,这个抽样分布的期望和方差分别有公式

$$\mu_V = \frac{2N_1N_2}{N_1 + N_2} + 1, \quad \sigma_V^2 = \frac{2N_1N_2(2N_1N_2 - N_1 - N_2)}{(N_1 + N_2)^2(N_1 + N_2 - 1)} \tag{13}$$

使用公式(13),我们可以在适当的显著性水平,检验随机性的假设.如果 N_1 和 N_2 均至少等于 8,则 V 的抽样分布非常接近正态分布.这样

$$z = \frac{V - \mu_V}{\sigma_V} \tag{14}$$

具有期望 0 方差 1 的正态分布.可以利用附录 C.

游程检验的进一步应用

下面是游程检验对其他统计问题的应用.

1. 对数值资料的随机性作大于或小于中位数的检验.

为了确定数值资料(如一个样本中的)是否是随机的,首先按收集的次序将资料排好.然后求这些资料的中位数,对每一资料值,看它是大于或小于中位数,分别在其位置标出字母 a 或 b.如果该值与中位数相同,则从样本中将其删去.根据 a 和 b 的序列是否是随机的看样本是随机的还是非随机的(看习题 10.20).

2. 从抽取的样本看总体间的差异

假定两个样本的容量分别为 m 和 n,记为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$.为了确定样本是否来自同一总体,首先按值的升序将 $m+n$ 个样本值排在一起.如果某些值是同样的,它们的排列次序可由一随机手续确定(比如使用随机数).如果产生的序列是随机的,我们能够认为样本并无实质的不同,它们是来自同一总体.如果序列不是随机的,则不能得出这样的结论.这一检验提供了相对 U 检验的另一选择(见习题 10.21).

斯皮尔曼(Spearman)秩相关

非参数方法也能用于度量两个变量 X 和 Y 的相关.代替使用精确的样本值,或精确值无法利用时,可以将资料按大小次序,重要性等等从 1 到 N 排序.按此手续将 X 和 Y 分别排好后,秩相关系数或常称的 Spearman 秩相关系数为

$$r_S = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)} \tag{15}$$

式中 N 为资料中值(X, Y)的对的个数,D 为对应的 X 值和 Y 值相应的排列秩之差.

习 题 解 答

符号检验

10.1　参看表 10-1,在 0.05 显著性水平,检验假设 H_0:机器Ⅰ和Ⅱ间不存在差异,对立备择假设 H_1:存在差异.

解　☞ 图 10-1 是一个二项分布方块图(和对它的一个正态近似).所给出的是 12 次抛掷匀称硬币中正面数 X 的概率,$X=0,1,2,\cdots,12$.从第四章知正面数 X 的概率为

$$\Pr\{X\} = \binom{12}{X}\left(\frac{1}{2}\right)^X\left(\frac{1}{2}\right)^{12-X} = \binom{12}{X}\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

其中 $\Pr\{0\}=0.00024$, $\Pr\{1\}=0.00293$, $\Pr\{2\}=0.01611$, 和 $\Pr\{3\}=0.05371$.

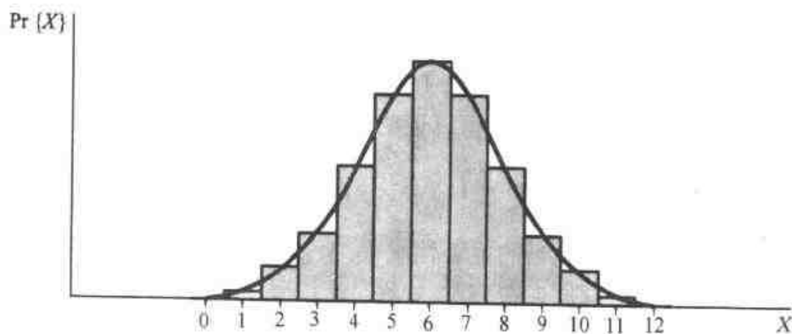


图 10-1

由于 H_1 是机器间存在差异的假设,而不是机器Ⅰ好于机器Ⅱ的假设,故使用双侧检验.对 0.05 水平,每一尾部的概率应是 $\frac{1}{2}(0.05)=0.025$. 我们现在将左侧尾部概率加起来,直到其和超过 0.025. 此时,

$$\Pr\{0,1\text{ 或 }2\text{ 正面}\} = 0.00024 + 0.00293 + 0.01611 = 0.01928$$

$$\Pr\{0,1,2\text{ 或 }3\text{ 正面}\} = 0.00024 + 0.00293 + 0.01611 + 0.05371 = 0.07299$$

由于 0.025 比 0.01928 大、比 0.07299 小,如果正面数小于或等于 2,我们能拒绝 H_0(按对称性,或者正面数大于等于 10).然而正面数(本章序列(1)中"+"号的数目)是 3. 这样在 0.05 水平不能拒绝 H_0. 在这个水平认为机器间不存在差异.

10.2 用正态对二项分布的近似,解习题 10.1.

解 ☞ 由正态对二项分布的近似,对应正面数 X 的 z 值是

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-Np}{\sqrt{Npq}}.$$

由二项分布的变量 X 是离散的,而正态分布是连续的,故进行连续性修正(例如,3 个正面看作是 2.5 和 3.5 间的一个值).这相当于当 $X>np$ 时,X 减去 0.5;当 $X<np$ 时,X 增加 0.5. 现在 $N=12$, $\mu=Np=12\times0.5=6$, $\sigma=\sqrt{Npq}=\sqrt{12\times0.5\times0.5}=1.73$,所以

$$z = \frac{(3+0.5)-6}{1.73} = -1.45$$

由于它比 −1.96 大(左侧尾部是 0.025 的面积相应的 z 值),我们得到与习题 10.1 同样的结论.

注意,$\Pr\{z\leqslant-1.45\}=0.0735$ 与习题 10.1 中的 $\Pr\{X\leqslant3\}=0.07299$ 相当一致.

10.3 PQR 公司宣称生产的一种型号电池的寿命大于 250 小时,一个顾客希望确定此主张是否合理,测量了该种电池 24 个的寿命,结果列在表 10-3 中,假定样本是随机的,在 0.05 显著水平下,确定公司的主张是否合理.

表 10-3

271	230	198	275	282	225	284	219
253	216	262	288	236	291	253	224
264	295	211	252	294	243	272	268

解 ☞ 假设 H_0 是公司的电池的寿命等于 250 小时,而假设 H_1 是其寿命大于 250 小时.相对 H_1 检验 H_0,可以使用符号检验.为此,首先从表 10-3 的每一数据减去 250,记录差的符号,得表 10-4. 有 15 个加号和 9 个减号.

表 10-4

+	−	−	+	+	−	+	−
+	−	+	+	−	+	+	−
+	+	−	+	+	−	+	+

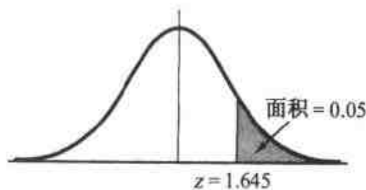


图 10-2

在 0.05 显著水平,使用单侧检验,当 z 值大于 1.645(图 10-2)时,我们应拒绝 H_0. 使用连续性修正,得 z 值

$$z = \frac{(15-0.5)-24\times0.5}{\sqrt{24\times0.5\times0.5}} = 1.02$$

故在 0.05 水平,不能认为公司的主张是合理的.

10.4 表 10-5 列出了一个州级测验中的 40 个成绩的样本.在 0.05 显著性水平,检验假设:全部参与者的中位数成绩是(a)66,(b)75.

表 10-5

71	67	55	64	82	66	74	58	79	61
78	46	84	93	72	54	78	86	48	52
67	95	70	43	70	73	57	64	60	83
73	40	78	70	64	86	76	62	95	66

表 10-6

+	+	−	−	+	0	+	−	+	−
+	−	+	+	+	−	+	+	−	−
+	+	+	−	+	+	−	−	−	+
+	−	+	+	−	+	+	−	+	0

解 ☞ (a)从表 10-5 的数据减去 66,保留符号得表 10-6,其中有 23 个加号,15 个减号和 2 个 0. 删除两个 0,我们的样本包含 38 个符号:23 个加和 15 个减. 使用正态分布的双侧检验,每个尾部概率是$\frac{1}{2}\times 0.05=0.025$(图 10-3).

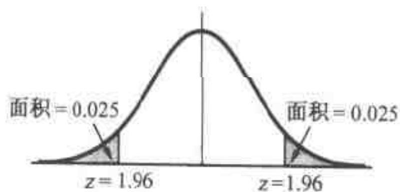


图 10-3

采用下叙决策规则:

当 $-1.96\leqslant z\leqslant 1.96$ 时,接受假设. 否则拒绝假设. 由于

$$z=\frac{X-Np}{\sqrt{Npq}}=\frac{(23-0.5)-38\times 0.5}{\sqrt{38\times 0.5\times 0.5}}=1.14$$

我们在 0.05 水平,接收假设:中位数是 66.

注意也能使用减号数 15,这时

$$z=\frac{(15+0.5)-38\times 0.5}{\sqrt{38\times 0.5\times 0.5}}=-1.14$$

结论是一样的.

(b)从表 10-5 每一数减去 75,得到表 10-7,其中有 13 个加号和 27 个减号. 由于

$$z=\frac{(13+0.5)-40\times 0.5}{\sqrt{40\times 0.5\times 0.5}}=-2.06$$

在 0.05 水平,我们拒绝中位数是 75 的假设.

表 10-7

−	−	−	−	+	−	−	−	+	−
+	−	+	+	−	−	+	+	−	−
−	+	−	−	−	−	−	−	−	+
−	−	+	−	−	+	+	−	+	−

使用这一方法,我们能够得到测验的中位数成绩的 95% 置信区间(见习题 10.30).

曼-魏特莱 U 检验

10.5　参看表 10-2,在 0.05 显著性水平,确定合金 Ⅰ 和合金 Ⅱ 制做的缆绳间是否存在差异.

解 ☞ 我们按照步骤1,2和3(本章正文中描述的)进行工作.

步骤1　混合全部18个样本值,从小到大排列,得表10-8的第一行,这些值的排列秩是1到18,列在第二行.

表 10-8

10.7	11.8	12.6	12.9	14.1	14.7	15.2	15.9	16.1	16.4	17.8	18.3	18.9	19.6	20.5	22.7	24.2	25.3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

步骤2　求每一样本的对应秩的和.表10-2的样本及相应的表10-8中的秩一起列在表10-9中.

表 10-9

合金Ⅰ		合金Ⅱ	
缆绳强度	秩	缆绳强度	秩
18.3	12	12.6	3
16.4	10	14.1	5
22.7	16	20.5	15
17.8	11	10.7	1
18.9	13	15.9	8
25.3	18	19.6	14
16.1	9	12.9	4
24.2	17	15.2	7
和	106	11.8	2
		14.7	6
		和	65

合金Ⅰ的秩和为106,合金Ⅱ的秩和为65.

步骤3　由于合金Ⅰ的样本容量较小,$N_1=8$,而$N_2=10$.对应秩和为$R_1=106, R_2=65$,故

$$U=N_1N_2+\frac{N_1(N_1+1)}{2}-R_1=8\times10+\frac{8\times9}{2}-106=10$$

$$\mu_U=\frac{N_1N_2}{2}=\frac{8\times10}{2}=40,\ \sigma_U^2=\frac{N_1N_2(N_1+N_2+1)}{12}=\frac{8\times10\times19}{12}=126.67$$

那么$\sigma_U=11.25$,且

$$z=\frac{U-\mu_U}{\sigma_U}=\frac{10-40}{11.25}=-2.67$$

由于我们检验的假设H_0是合金间不存在差异,故要求双侧检验.对0.05水平,决策规则是:当$-1.96\leqslant z\leqslant1.96$,接收$H_0$,否则拒绝$H_0$.由于$z=-2.67$,我们拒绝$H_0$,并认为在0.05水平下合金间存在差异.

10.6　用习题10.5的资料,验证本章(6)和(7)式,由样本1和2产生的U值为

$$U_1=N_1N_2+\frac{N_1(N_1+1)}{2}-R_1=8\times10+\frac{8\times9}{2}-106=10$$

$$U_2=N_1N_2+\frac{N_2(N_2+1)}{2}-R_2=8\times10+\frac{10\times11}{2}-65=70$$

解 ☞ 我们有$U_1+U_2=10+70=80=N_1N_2$.又

$$R_1+R_2=106+65=171$$

$$\frac{N(N+1)}{2}=\frac{(N_1+N_2)(N_1+N_2+1)}{2}=\frac{18\times19}{2}=171$$

10.7　使用由合金Ⅱ的样本构成的统计量U,解习题10.5.

解 ☞ 从合金Ⅱ的样本,有

$$U=N_1N_2+\frac{N_2(N_2+1)}{2}-R_2=8\times10+\frac{10\times11}{2}-65=70$$

从而

$$z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} = \frac{70 - 40}{11.25} = 2.67$$

在习题 10.5 中 z 值是负的，使用正态分布的左侧尾部，这儿的 z 值应替换为使用右侧尾部. 由于这一 z 值也在 $-1.96 \leqslant z \leqslant 1.96$ 的外面，故结论和习题 10.5 是一样的.

10.8　一位教授教两个班的心理学课，上午班有 9 名学生，午后班有 12 名学生. 期末考试的时间全部学生是一样的. 两班的成绩列在表 10-10 中，在 0.05 显著水平下，能认为上午班学习成绩比午后班差吗？

表 10-10

上午班	73	87	79	75	82	66	95	75	70			
午后班	86	81	84	88	90	85	84	92	83	91	53	84

解　☞ **步骤 1**　表 10-11 列出了成绩排序和秩. 注意有两个 75，它们的秩均值为 $\frac{1}{2}(5-6)=5.5$，3 个 84 的秩均值为 $\frac{1}{3}(11+12+13)=12$.

表 10-11

53	66	70	73	75	75	79	81	82	83	84	84	84	85	86	87	88	90	91	92	95
1	2	3	4	5.5		7	8	9	10	12			14	15	16	17	18	19	20	21

步骤 2　参考表 10-10 的记录，得表 10-12.

表 10-12

													秩和
上午班	4	16	7	5.5	9	2	21	5.5	3				73
午后班	15	8	12	17	18	14	12	20	10	19	1	12	158

检查：

$$R_1 = 73, R_2 = 158, N = N_1 + N_2 = 9 + 12 = 21, \text{得 } R_1 + R_2 = 73 + 158 = 231$$

$$\frac{N(N+1)}{2} = \frac{21 \times 22}{2} = 231 = R_1 + R_2$$

步骤 3

$$U = N_1 N_2 + \frac{N_1(N_1+1)}{2} - R_1 = 9 \times 12 + \frac{9 \times 10}{2} - 73 = 80$$

$$\mu_U = \frac{N_1 N_2}{2} = \frac{9 \times 12}{2} = 54, \quad \sigma_U^2 = \frac{N_1 N_2 (N_1 + N_2 + 1)}{12} = \frac{9 \times 12 \times 22}{12} = 198$$

因此

$$z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} = \frac{80 - 54}{14.07} = -1.85$$

由于希望的备择假设 H_1 为上午班比午后班差，故在 0.05 水平需用单侧检验，检验假设 H_0：不存在差异. 参考图 10-2，应用到这里，我们有决策规则：当 $z \leqslant 1.645$ 时，接收 H_0，当 $z > 1.645$ 时，拒绝 H_0.

由于实现的 z 值为 $1.85 > 1.645$，我们拒绝 H_0，认为在 0.05 水平，上午班学习比午后班差. 然而，在 0.01 水平下，不能得到这一结论（见习题 10.33）.

10.9　对表 10.13 的资料求 U 值，(a) 使用本章公式(2)，(b) 使用计数方法（如本章注 4 所描述的）.

解　☞ (a) 根据两个样本排列资料，按值的大小升序排列，并指定 1 至 5 的秩，得表 10-14.

表 10-13

样本 1	22	10	
样本 2	17	25	14

表 10-14

资料	10	14	17	22	25
秩	1	2	3	4	5

用秩代替对应的数据得表 10-15.

表 10-15

				秩和
样本 1	4	1		5
样本 2	3	5	2	10

从此表得秩和 $R_1=5, R_2=5$. 由 $N_1=2$ 和 $N_2=3$, 从样本 1 得 U 值为

$$U = N_1N_2 + \frac{N_1(N_1+1)}{2} - R_1 = 2\times3 + \frac{2\times3}{2} - 5 = 4$$

类似地, 能求得从样本 2 得的 $U=2$.

(b)将表 10-14 中的样本值代替为Ⅰ或Ⅱ, 表示该值来自样本 1 或 2. 这样表 10-14 的第一行变成

资料	Ⅰ	Ⅱ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ

由此我们可以看到

在样本 2 的第一个值前的第一样本值数 = 1

在样本 2 的第二个值前的第一样本值数 = 1

在样本 2 的第三个值前的第一样本值数 = 2

总和 = 4

这样得根据第一个样本的 U 值为 4. 类似地, 有

在样本 1 的第一个值前的第二样本值数 = 0

在样本 1 的第二个值前的第二样本值数 = 2

总和 = 2

得根据第二样本的 U 值为 2.

注意, 由于 $N_1=2, N_2=3$, 以上 U 值满足 $U_1+U_2=N_1N_2$, 即 $4+2=2\times3=6$.

10.10 一个总体包含值 7, 12 和 15. 从此总体无放回地抽取两个样本, 样本 1 包含一个值, 样本 2 包含两个值(两个样本耗尽了整个总体). (a)求 U 的样本分布; (b)求(a)中分布的均值和方差, (c)使用本章公式(3)证实(b)中获得的结果.

解 ☞ (a)为了避免结, 我们选择了无放回抽样. 对选取样本有 $3\times2=6$ 种可能, 如表 10-16. 我们很容易用秩 1, 2, 3 去代替 7, 12, 15. 在表 10-16 中列出了从样本 1 求得的 U 值. 如果根据样本 2, 所得分布将是一样的.

表 10-16

样本 1	样本 2		U
7	12	15	2
7	15	12	2
12	7	15	1
12	15	7	1
15	7	12	0
15	12	7	0

(b)从表 10-16 求得均值和方差为

$$\mu_U = \frac{2+2+1+1+0+0}{6} = 1$$

$$\sigma_U^2=\frac{(2-1)^2+(2-1)^2+(1-1)^2+(1-1)^2+(0-1)^2+(0-1)^2}{6}=\frac{2}{3}$$

(c)从公式(3)有

$$\mu_U=\frac{N_1N_2}{2}=\frac{1\times 2}{2}=1$$

$$\sigma_U^2=\frac{N_1N_2(N_1+N_2+1)}{12}=\frac{1\times 2\times(1+2+1)}{12}=\frac{2}{3}$$

和(b)中的结果一致.

10.11　(a)求习题10.9中 U 值的抽样分布并列表.

(b)从(a)的结果直接找出 U 的均值和方差.

(c)用本章公式(3)证实(b)中的结果.

解　(a)这时从两个样本选取值的可能情况有 $5\times4\times3\times2=120$,用习题10.9的方法需大量劳动.为了简化,让我们集中看较小的样本($N_1=2$)以及可能的秩和 R_1. 当样本包含两个最低的秩(1,2)时,样本1的秩和最小,$R_1=1+2=3$. 类似地,当样本包含两个最高的秩(4,5)时,样本1的秩和最大,$R_1=4+5=9$. 这样知 R_1 从3变化到9.

表10-17的第一列列出了 R_1 的这些值(从3到9),第二列列出了对应的秩和为 R_1 的样本1的秩值,第三列列出了具有和 R_1 的样本频数.例如,具有 $R_1=5$ 的样本有 $f=2$. 因为 $N_1=2, N_2=3$,有

$$U=N_1N_2+\frac{N_1(N_1+1)}{2}-R_1=2\times3+\frac{2\times3}{2}-R_1=9-R_1$$

表10-17的第五列列出了 $U=9-R_1$ 的概率(即 $\Pr\{U=9-R_1\}$),它是从频率得到的.频率是每频数除以全部频数之和10得到的.例如 $\Pr\{U=4\}=\frac{2}{10}=0.2$.

表 10-17

R_1	样本1秩值	f	U	$\Pr\{U=9-R_1\}$
3	(1,2)	1	6	0.1
4	(1,3)	1	5	0.1
5	(1,4),(2,3)	2	4	0.2
6	(1,5),(2,4)	2	3	0.2
7	(2,5),(3,4)	2	2	0.2
8	(3,5)	1	1	0.1
9	(4,5)	1	0	0.1

(b)从表10-17的第三和第四列,有

$$\mu_U=\bar U=\frac{\sum fU}{\sum f}=\frac{1\times6+1\times5+2\times4+2\times3+2\times2+1\times1+1\times0}{1+1+2+2+2+1+1}=3$$

$$\sigma_U^2=\frac{\sum f(U-\bar U)^2}{\sum f}$$

$$=\frac{1\times(6-3)^2+1\times(5-3)^2+2\times(4-3)^2+2\times(3-3)^2+2\times(2-3)^2+1\times(1-3)^2+1\times(0-3)^2}{10}$$

$$=3$$

另解

$$\sigma_U^2=\overline{U^2}-\bar U^2=\frac{1\times6^2+1\times5^2+2\times4^2+2\times3^2+2\times2^2+1\times1^2+1\times0^2}{10}-3^2=3$$

(c)由 $N_1=2, N_2=3$,从公式(3),有

$$\mu_U=\frac{N_1N_2}{2}=\frac{2\times3}{2}=3\quad \sigma_U^2=\frac{N_1N_2(N_1+N_2+1)}{12}=\frac{2\times3\times6}{12}=3$$

10.12　在一个集合中有 N 个数,从1到 N 排秩,证明这些秩的总和为 $[N(N+1)]/2$.

证明　令 R 是这些秩的总和,则有

$$R=1+2+3+\cdots+(N-1)+N \tag{16}$$

$$R=N+(N-1)+(N-2)+\cdots+2+1 \tag{17}$$

(17)式的和是将(16)式的和反向写出的.(16)加(17)则有

$$2R=(N+1)+(N+1)+(N+1)+\cdots+(N+1)+(N+1)=N(N+1)$$

在和中$(N+1)$出现 N 次,所以 $R=[N(N+1)]/2$. 这一总和也可从初等代数的算术级数获得.

10.13　如果 R_1 和 R_2 是 U 检验中样本 1 和样本 2 分别的秩和,证明 $R_1+R_2=[N(N+1)]/2$.

证明 ☞ 我们假定样本资料中不存在结,那么 R_1 必是集$\{1,2,\cdots,N\}$中某些秩的和,而 R_2 是余下的集中的那些秩的和,所以 R_1+R_2 必是该集中全部秩的总和.即由习题10.12,有

$$R_1+R_2=1+2+3+\cdots+N=[N(N+1)]/2.$$

葛斯卡尔-华里斯 H 检验

10.14　一家公司想要购入五种不同机器 A,B,C,D,E 中的一种.为了确定机器间是否有差异,设计了一个试验.让五个试验操作员每人在每台机器上工作相等的时间.表 10-18 记录了每一机器生产的产品数.在(a)0.05,(b)0.01 水平,检验机器间不存在差异的假设.

表 10-18

A	68	72	77	42	53
B	72	53	63	53	48
C	60	82	64	75	72
D	48	61	57	64	50
E	64	65	70	68	53

表 10-19

						秩和
A	17.5	21	24	1	6.5	70
B	21	6.5	12	6.5	2.5	48.5
C	10	25	14	23	21	93
D	2.5	11	9	14	4	40.5
E	14	16	19	17.5	6.5	73

解 ☞ 由于存在 5 个样本(A,B,C,D 和 E),$k=5$. 又由于每一样本包含 5 个值,有 $N_1=N_2=N_3=N_4=N_5=5$, $N_1+N_2+N_3+N_4+N_5=25$. 将全部值按值的升序排列,对结给出适当的秩值,用表 10-19 代替表 10-18,表右边的一列列出了秩和.可以看到 $R_1=70$, $R_2=48.5$, $R_3=93$, $R_4=40.5$ 和 $R_5=73$,所以

$$H=\frac{12}{N(N+1)}\sum_{j=1}^{k}\frac{R_j^2}{N_j}-3(N+1)$$

$$=\frac{12}{25\times26}\left[\frac{70^2}{5}+\frac{48.5^2}{5}+\frac{93^2}{5}+\frac{40.5^2}{5}+\frac{73^2}{5}\right]-3\times26=6.44$$

在 0.05 显著性水平,由 $k-1=4$,从附录 E 有 $\chi^2_{0.95}=9.49$. 由于 $6.44<9.49$,在 0.05 水平,我们不能拒绝机器间不存在差异的假设.并且在 0.01 水平也肯定不能拒绝.换句话说,在两个水平,我们能够接收机器间不存在差异的假设(或保留进一步评判).

注意,我们已经用方差分析解过这一问题(见习题 9.8),并且得到同样的结论.

10.15　如果对结采用修正公式,解习题 10.14.

解 ☞ 表 10-20 对每一结观测值处的结源数目.例如,48 出现两次,其 $T=2$, 53 出现四次,其 $T=4$.对 T 的每一个值计算 T^3-T,并相加,求得 $\sum(T^3-T)=6+60+24+6+24=120$,见表 10-20.那么,由 $N=25$,得修正因子为

$$1-\frac{\sum(T^3-T)}{N^3-N}=1-\frac{120}{25^3-25}=0.9923$$

表 10-20

观测值	48	53	64	68	72	
结的数目(T)	2	4	3	2	3	
T^3-T	6	60	24	6	24	$\sum(T^3-T)=120$

H 的修正值为

$$H_c = \frac{6.44}{0.9923} = 6.49$$

这一修正未改变习题 10.14 中的结论.

10.16 从一总体中随机地选取了 3 个样本. 排列所得资料得表 10-21 的秩的表, 在(a)0.05, (b)0.01 显著性水平, 确定样本间是否存在差异.

解 ☞

表 10-21

样本 1	7	4	6	10	
样本 2	11	9	12		
样本 3	5	1	3	8	2

这里 $k=3, N_1=4, N_2=3, N_3=5, N=N_1+N_2+N_3=12, R_1=7+4+6+10=27, R_2=11+9+12=32, R_3=5+1+3+8+2=19$. 故

$$H = \frac{12}{N(N-1)}\sum_{j=1}^{k}\frac{R_j^2}{N_j} - 3(N+1) = \frac{12}{12\times 13}\left[\frac{27^2}{4}+\frac{32^2}{3}+\frac{19^2}{5}\right] - 3\times 13 = 6.83$$

(a)对自由度 $k-1=3-1=2$, $\chi^2_{0.95}=5.99$, 由于 $6.83>5.99$, 在 0.05 水平, 我们能够认为样本间存在差异.

(b)对自由度 2, $\chi^2_{0.99}=9.21$, 由于 $6.83<9.21$, 在 0.01 水平, 我们不能认为样本间存在差异.

随机性的游程检验

10.17 投掷一硬币 30 次, 正面(H)和反面(T)出现的序列如下

$$H\ T\ T\ H\ T\ H\ H\ H\ T\ H\ H\ T\ T\ H\ T$$
$$H\ T\ H\ H\ T\ H\ T\ T\ H\ T\ H\ H\ T\ H\ T$$

(a)确定游程的数目 V.

(b)在 0.05 显著性水平, 检验该序列是否随机.

解 ☞ (a)使用竖杠指示一个游程:

$$H\,|\,T\ T\,|\,H\,|\,T\,|\,H\ H\ H\,|\,T\,|\,H\ H\,|\,T\ T\,|\,H\,|\,T\,|$$
$$H\,|\,T\,|\,H\ H\,|\,T\ H\,|\,T\ T\,|\,H\,|\,T\,|\,H\ H\,|\,T\,|\,H\,|\,T\,|$$

我们可以看到游程的数目 $V=22$.

(b)在给定的样本序列中, 存在 $N_1=6$ 个正面, $N_2=14$ 个反面, 从(a)知游程数 $V=22$, 故由本章的公式(13)有

$$\mu_V = \frac{2\times 16\times 14}{16+14}+1 = 15.93,\ \sigma_V^2 = \frac{2\times 16\times 14\times(2\times 16\times 14-16-14)}{(16+14)^2\times(16+14-1)} = 7.175$$

或 $\sigma_V=2.679$. 因此对应 $V=22$ 个游程的 z 值为

$$z = \frac{V-\mu_V}{\sigma_V} = \frac{22-15.93}{2.679} = 2.27$$

在 0.05 显著性水平作双侧检验, 当 $-1.96\leqslant z\leqslant 1.96$ 时, 我们应接受随机性的假设 H_0, 否则应拒绝(见图 10-4).

由于算出的 z 值是 $2.27>1.96$, 在 0.05 水平, 我们应认为投掷是不随机的. 检验显示存在太多的游程, 投掷中有某种循环模式.

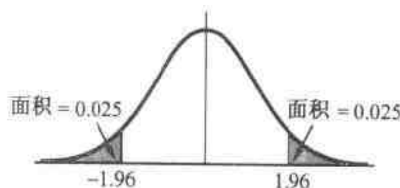


图 10-4

如果进行连续性修正,则 z 值替换为

$$z=\frac{(22-0.5)-15.93}{2.679}=2.08$$

得到同样的结论.

10.18 一台机器制造了 48 件工具的一个样本,结果如下,G 表示好品,D 表示次品:

$G\ G\ G\ G\ G\ G\ D\ D\ G\ G\ G\ G\ G\ G\ G\ G$

$G\ G\ D\ D\ D\ D\ G\ G\ G\ G\ G\ G\ D\ G\ G\ G$

$G\ G\ G\ G\ G\ G\ D\ D\ G\ G\ G\ G\ G\ D\ G\ G$

在 0.05 显著性水平,检验序列的随机性.

解 ☞ D 和 G 的数目分别是 $N_1=10$ 和 $N_2=38$,游程数目是 $V=11$,故均值和方差为

$$\mu_V=\frac{2\times10\times38}{10+38}+1=16.83,\sigma_V^2=\frac{2\times10\times38\times(2\times10\times38-10-38)}{(10+38)^2\times(10+38-1)}=4.997$$

而 $\sigma_V=2.235$.

在 0.05 水平,作双侧检验,当 $-1.96\leqslant z\leqslant1.96$ 时,我们应接收随机性假设 H_0,否则应拒绝(见图 10-4).对应 $V=11$ 的 z 值为

$$z=\frac{V-\mu_V}{\sigma_V}=\frac{11-16.83}{2.235}=-2.61$$

由于 $-2.61<-1.96$,在 0.05 水平,我们能够拒绝 H_0.

检验说明存在太少的游程,这些游程指示了次品的集群.换句话说,在次品工具的产出方面似乎存在某种倾向模式.有理由对生产过程作进一步考察.

10.19 (a)从由三个 a 和两个 b 组成的全部序列中,对每一序列给出游程的个数 V;

(b)寻找 V 的抽样分布;

(c)寻找 V 的概率分布.

解 ☞ (a)包含三个 a 和两个 b 的可能序列数为

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}=10$$

表 10-22 列出了这些序列,以及每个序列的游程数目.

表 10-22

序列					游程(V)
a	a	a	b	b	2
a	a	b	a	b	4
a	a	b	b	a	3
a	b	a	b	a	5
a	b	b	a	a	3
a	b	a	a	b	4
b	b	a	a	a	2
b	a	b	a	a	4
b	a	a	a	b	3
b	a	a	b	a	4

表 10-23

V	f
2	2
3	3
4	4
5	1

(b)V 的抽样分布给在表 10-23 中(从表 10-22 得到),表中 V 记游程数目,f 记频数.例如,表 10-23显示存在一个 5,四个 4,等等.

(c)用总频数 $2+3+4+1=10$ 除每一个频数,从表 10-23 可得 V 的概率分布.例如 $\Pr\{V=5\}=\frac{1}{10}=0.1$.

10.20 直接从习题 10.19 获得的结果,求游程数目的(a)均值,(b)方差.

解 ☞ (a)从表 10-22,有

$$\mu_V=\frac{2+4+3+5+3+4+2+4+3+4}{10}=\frac{17}{5}$$

另解 从表 10-23 的集群数据,有

$$\mu_V = \frac{\sum fV}{\sum f} = \frac{2\times2+3\times3+4\times4+1\times5}{2+3+4+1} = \frac{17}{5}$$

(b)使用集群数据计算方差,从表 10-23,有

$$\sigma_V^2 = \frac{\sum f(V-\overline{V})^2}{\sum f}$$

$$= \frac{1}{10}\left[2\times\left(2-\frac{17}{5}\right)^2+3\times\left(3-\frac{17}{5}\right)^2+4\times\left(4-\frac{17}{5}\right)^2+1\times\left(5-\frac{17}{2}\right)^2\right] = \frac{21}{25}$$

另解　如第五章所示,方差

$$\sigma_V^2 = \overline{V^2} - \overline{V}^2 = \frac{2\times2^2+3\times3^2+4\times4^2+1\times5^2}{10} - \left(\frac{17}{5}\right)^2 = \frac{21}{25}$$

10.21　使用本章公式(13),解习题 10.20.

解　☞ 由于有 3 个 a 和 2 个 b, $N_1=3$, $N_2=2$,故

(a)
$$\mu_V = \frac{2N_1N_2}{N_1+N_2}+1 = \frac{2\times3\times2}{3+2}+1 = \frac{17}{5}$$

(b)
$$\sigma_V^2 = \frac{2N_1N_2(2N_1N_2-N_1-N_2)}{(N_1+N_2)^2(N_1+N_2-1)} = \frac{2\times3\times2\times(2\times3\times2-3-2)}{(3+2)^2\times(3+2-1)} = \frac{21}{25}$$

游程检验的进一步应用

10.22　参考习题 10.3,设定显著性水平为 0.05,确定 PQR 公司生产的电池的样本的寿命是否是随机的.

解　☞ 表 10-24 按升序列出了电池寿命.表中有 24 个数据,中位数可从中间的两个数获得,为 $\frac{1}{2}(253+262)=257.5$. 按照数值大于中位数时记为 a,数值小于中位数时记为 b,将表 10-24 的资料重写为表 10-25.其中有 12 个 a, 12 个 b,共有 15 个游程.如此, $N_1=12$, $N_2=12$, $N=24$, $V=15$. 有

$$\mu_V = \frac{2N_1N_2}{N_1+N_2}+1 = \frac{2\times12\times12}{12+12}+1 = 13,\quad \sigma_V^2 = \frac{2\times12\times12\times264}{24^2\times23} = 5.739$$

所以

$$z = \frac{V-\mu_V}{\sigma_V} = \frac{15-13}{2.396} = 0.835$$

使用 0.05 显著性水平的双侧检验,当 $-1.96\leqslant z\leqslant1.96$ 时,应接收随机性的假设.由于 0.835 落在这一范围内,故我们认为样本是随机的.

表 10-24

198	211	216	219	224	225	230	236
243	252	253	253	262	264	268	271
272	275	282	284	288	291	294	295

表 10-25

a	b	b	a	a	b	a	b
b	b	a	a	b	a	b	b
a	a	b	b	a	b	a	a

10.23　使用随机性的游程检验,解习题 10.5.

解　☞ 将出现在表 10-8 的第一行的两个样本的全部值进行排列,对来自样本 Ⅰ 和 Ⅱ 的资料分别使用符号 a 和 b,排列得到

$$b\,b\,b\,b\,b\,b\,b\,b\,a\,a\,a\,a\,a\,b\,b\,a\,a\,a$$

由于有 4 个游程,有 $V=4$ 和 $N_1=8$, $N_2=10$,那么

$$\mu_V = \frac{2N_1N_2}{N_1+N_2}+1 = \frac{2\times8\times10}{18}+1 = 9.889$$

$$\sigma_V^2 = \frac{2N_1N_2(2N_1N_2-N_1-N_2)}{(N_1+N_2)^2(N_1+N_2-1)} = \frac{2\times8\times10\times142}{18^2\times17} = 4.125$$

所以

$$z=\frac{V-\mu_V}{\sigma_V}=\frac{4-9.889}{2.031}=-2.90$$

H_0 是合金间不存在差异的假设，它也是上述的序列是随机的假设．当 $-1.96 \leqslant z \leqslant 1.96$ 时，我们应接收假设，否则拒绝假设．由于 $z=-2.90$ 在此区间外面，故拒绝 H_0．我们得到了习题 10.5 同样的结论．

如果采用连续性修正，

$$z=\frac{V-\mu_V}{\sigma_V}=\frac{(4+0.5)-9.889}{2.031}=-2.65$$

也得到相同的结论．

秩相关

10.24　表 10-26 显示的是按字母顺序排列的 10 个学生的情况，按照他们在一门生物课中实验室和课堂两方面的成绩分别给出了秩，求秩相关系数．

表 10-26

实验室	8	3	9	2	7	10	4	6	1	5
课堂	9	5	10	1	8	7	3	4	2	6

解　对每一学生实验室和课堂秩间的差 D 记在表 10-27 中，表中也给出了 D^2 和 $\sum D^2$．

表 10-27

秩间差(D)	−1	−2	−1	1	−1	3	1	2	−1	−1	
D^2	1	4	1	1	1	9	1	4	1	1	$\sum D^2=24$

这样，

$$r_S=1-\frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)}=1-\frac{6(24)}{10(10^2-1)}=0.8545$$

这显示在该课程的实验室和课堂成绩间存在值得注意的关系．

10.25　表 10-28 列出了 12 个父亲和其成年长子的身高的一个样本．求秩相关系数．

表 10-28

父亲身高(英寸)	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
儿子身高(英寸)	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

解　按升序排列父亲身高为

$$62\quad 63\quad 64\quad 65\quad 66\quad 67\quad 67\quad 68\quad 68\quad 69\quad 71 \tag{18}$$

由于排列中第六个和第七个位置有相同的身高 67 英寸，对这两个位置指定平均秩 $\frac{1}{2}(6+7)=6.5$．类似地，对第八个和第九个位置指定秩 $\frac{1}{2}(8+9)=8.5$．这样父亲身高给定的秩为

$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6.5\quad 6.5\quad 8.5\quad 8.5\quad 10\quad 11\quad 12 \tag{19}$$

类似地，按升序排列儿子的身高

$$65\quad 65\quad 66\quad 66\quad 67\quad 68\quad 68\quad 68\quad 68\quad 69\quad 70\quad 71 \tag{20}$$

由于第六、七、八和九位置有相同身高 68 英寸，在这些地方指定秩 $\frac{1}{4}(6+7+8+9)=7.5$，儿子身高给定的秩为

$$1.5\quad 1.5\quad 3.5\quad 3.5\quad 5\quad 7.5\quad 7.5\quad 7.5\quad 7.5\quad 10\quad 11\quad 12 \tag{21}$$

使用(18)和(19)及(20)和(21)式的对应,将表 10-28 替换为表 10-29,表 10-30 给出了秩间差 D 和算得的 D^2, $\sum D^2$. 因此,

$$r_S = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 72.50}{12 \times (12^2 - 1)} = 0.7465$$

这一结果与用其他方法获得的相关系数吻合得非常好(见习题 8.26,8.28,8.30 和 8.32).

表 10-29

父亲的秩	4	2	6.5	3	8.5	1	11	5	8.5	6.5	10	12
儿子的秩	7.5	3.5	7.5	1.5	10	3.5	7.5	1.5	12	5	7.5	11

表 10-30

D	−3.5	−1.5	−1.0	1.5	−1.5	−2.5	3.5	3.5	−3.5	1.5	2.5	1.0	
D^2	12.25	2.25	1.00	2.25	2.25	6.25	12.25	12.25	12.25	2.25	6.25	1.00	$\sum D^2 = 72.50$

补 充 习 题

符号检验

10.26　一家公司声称他的产品加入汽车油箱后,每加仑的行驶路程将会不同,为检验这一主张,选取 15 辆汽车,测试加入和不加入时每加仑的行驶路程,结果列在表 10-31 中,假定驾驶条件相同,在(a) 0.05,(b)0.01 显著性水平,确定是否由于添加该产品而产生差异.

表 10-31

添加	34.7	28.3	19.6	25.1	15.7	24.5	28.7	23.5	27.7	32.1	29.6	22.4	25.7	28.1	24.3
不添加	31.4	27.2	20.4	24.6	14.9	22.3	26.8	24.1	26.2	31.4	28.8	23.1	24.0	27.3	22.9

10.27　在习题 10.26 中,在 0.05 显著水平下,是否可认为每加仑的行驶路程添加比不添加要好.

10.28　一家减肥俱乐部说他们设计了一个特别程序.如果正确地执行,一个月至少会减少 6% 的重量,为了检验俱乐部的主张,36 个成年人执行了这一程序,这些人中的 25 个实现了希望的减肥,6 个增加了体重,其余的基本未变,在 0.05 显著性水平,确定该程序是否有效.

10.29　一培训管理人声称,对公司销售员给予一个特殊课程将会使公司年销售增加,为了检验这一主张,对 24 个人给予了该课程.这 24 人中有 16 人增加了销售,6 人减少了销售,其余 2 人未变,在 0.05 显著性水平,检验该课程增加公司销售的假设.

10.30　MW 饮料公司在该县的 27 个地区进行品尝试验,以确定对 A 和 B 两个品牌公众的相对喜好,在 8 个地区对 A 品牌的喜好超过 B 品牌,在 17 个地区对 B 品牌的喜好超过 A 品牌,其余地区两者无差异,能否在 0.05 显著水平下,认为对 B 品牌的喜好超过 A 品牌?

10.31　一制品者生产的 25 根绳索的一个随机样本的断裂强度列在表 10-32 中,基于此样本,在 0.05 显著水平下,检验该制造者的绳索断裂强度为(a)25,(b)30,(c)35,(d)40.

表 10-32

41	28	35	38	23
37	32	24	46	30
25	36	22	41	37
43	27	34	27	36
42	33	28	31	24

10.32　对习题 10.4 中的资料,说明如何获得 95% 的置信限.

10.33　叙述一个涉及符号检验的问题,并进行解答.

曼-魏特莱 U 检验

10.34　在 XYZ 大学,A 和 B 两个教员教一门化学的入门课程,在一次共同的期末测验中,他们的学生得到的成绩列在表 10-33 中,在 0.05 显著性水平下,检验两个教员的学生的成绩不存在差异的假设.

表 10-33

A	88	75	92	71	63	84	55	64	82	96				
B	72	65	84	53	76	80	51	60	57	85	94	87	73	61

10.35　参考习题 10.34,能否在 0.01 显著性水平,认为 B 的学生成绩比 A 的学生成绩差?

10.36　一个农民希望确定两个不同麦种 I 和 II 之间产量是否存在差异,表 10-34 列出了两个麦种每单位面积的产量,该农民能否在(a)0.05,(b)0.01 显著性水平下,认为存在差异?

表 10-34

麦 I	15.9	15.3	16.4	14.9	15.3	16.0	14.6	15.3	14.5	16.6	16.0
麦 II	16.4	16.8	17.1	16.9	18.0	15.6	18.1	17.2	15.4		

10.37　习题 10.36 中的农民能否认为在 0.05 水平下,麦 II 的产量大于麦 I?

10.38　一家公司希望确定两个品牌 A 和 B 的汽油间是否存在差异,表 10-35 列出了每一品牌每加仑行驶的距离,能否在 0.05 显著性水平下,认为(a)品牌间存在差异,(b)B 品牌优于 A 品牌?

表 10-35

A	30.4	28.7	29.2	32.5	31.7	29.5	30.8	31.1	30.7	31.8
B	33.5	29.8	30.1	31.4	33.8	30.9	31.3	29.6	32.8	33.0

10.39　U 检验能否用于确定表 10-1 中的机器 I 与 II 之间存在差异?

10.40　叙述一个使用 U 检验的问题,并进行解答.

10.41　对表 10-36 的资料,求 U.(a)使用公式方法,(b)使用计数方法.

表 10-36

样本 1	15	25
样本 2	20	32

表 10-37

样本 1	40	27	30	56
样本 2	10	35		

10.42　对表 10-37 的资料,做习题 10.41 的工作.

10.43　一个总体包含值 2,5,9 和 12. 从这一总体中抽取两个样本,第一样本包含这些值中的一个,第二样本包含其余的三个值.

(a)求 U 的抽样分布及其图表表示.

(b)求该分布的均值和方差,使用直接计算和公式两种方法.

10.44　证明 $U_1+U_2=N_1N_2$.

10.45　对下列情况证明 $R_1+R_2=[N(N+1)]/2$.(a)有一个结点,(b)有 2 个结点,(c)任意个结点.

10.46　如果 $N_1=14$, $N_2=12$ 和 $R_1=105$,求(a)R_2,(b)U_1,(c)U_2.

10.47　如果 $N_1=10$, $N_2=16$ 和 $U_2=60$,求(a)R_1,(b)R_2,(c)U_1.

10.48　什么是 N_1,N_2,R_1,R_2,U_1 和 U_2 这些值的最大数.它能被其他的几个数确定吗?证明你的回答.

葛斯卡尔-华里斯 H 检验

10.49　进行一个试验，确定五种不同麦种 A, B, C, D 和 E 的产量．对每一种分配一块有四小块的田地．产量(单位：蒲式耳/亩)列在表 10-38 中．假定这些小块有相似的肥沃程度，小块对各种子的分配是随机的．在(a)0.05，(b)0.01 水平，确定产量间是否存在显著性差异．

表 10-38

A	20	12	15	19
B	17	14	12	15
C	23	16	18	14
D	15	17	20	12
E	21	14	17	18

表 10-39

A	33	38	36	40	31	35
B	32	40	42	38	30	34
C	31	37	35	33	34	30
D	27	33	32	29	31	28

10.50　一家公司希望检测四种不同型号的轮胎 A, B, C 和 D．它们行驶时的轮胎寿命(单位：千里)列在表 10-39 中，每一型号随机地放在六辆相似的汽车上行驶．在(a)0.05，(b)0.01 水平，确定各型轮胎间是否存在显著差异．

10.51　一个教员希望检测三种不同的教学方法Ⅰ，Ⅱ和Ⅲ．为此，教员随机地选择了一组五个学生的三组，用不同的方法教一组群体．对全体学生进行同样的考试，成绩列在表 10-40 中．在(a)0.05，(b)0.01 显著水平下，确定教学法间是否存在差异．

10.52　一个学期中，一个学生在不同科目中得到的分数如表 10-41．在(a)0.05，(b)0.01 水平，检验这些科目的分数间是否存在显著差异．

表 10-40

方法Ⅰ	78	62	71	58	73
方法Ⅱ	76	85	77	90	87
方法Ⅲ	74	79	60	75	80

表 10-41

数学	72	80	83	75	
自然	81	74	77		
英语	88	82	90	87	80
经济	74	71	77	70	

10.53　使用 H 检验，解(a)习题 9.14，(b)习题 9.23，(c)习题 9.24．

10.54　使用 H 检验，解(a)习题 9.25，(b)习题 9.26，(c)习题 9.27．

随机性的游程检验

10.55　对下列序列，确定游程的数目 V．

(a) $A\ B\ A\ B\ B\ A\ A\ A\ B\ B\ A\ B$

(b) $H\ H\ T\ H\ H\ H\ T\ T\ T\ T\ H\ H\ T\ H\ H\ T\ H\ T$

10.56　抽取 25 人的一个样本，看他们喜欢(Y)或不喜欢(N)某一产品．产生的样本为下列序列：

$Y\ Y\ N\ N\ N\ N\ Y\ Y\ Y\ N\ Y\ N\ N\ Y\ N\ N\ N\ N\ N\ Y\ Y\ Y\ Y\ N\ N$

(a)确定游程数目 V．

(b)在 0.05 显著性水平，确定反映是否是随机的．

10.57　对本章的序列(10)和(11)，使用游程检验，叙述有关随机性的结论．

10.58　(a)构造一切包含两个 a 和一个 b 的序列，对应每一序列给出游程数 V．

(b)求 V 的抽样分布．

(c)写出 V 的概率分布．

10.59　在习题 10.58 中，求 V 的均值和方差．(a)直接从抽样分布求，(b)用公式求．

10.60　对下列情况，解习题 10.58 和习题 10.59．(a)2 个 a 和 2 个 b，(b)1 个 a 和 3 个 b，(c)1 个 a 和 4 个 b．

10.61　对下列情况，解习题 10.58 和习题 10.59．(a)2 个 a 和 4 个 b，(b)3 个 a 和 3 个 b．

游程检验的进一步应用

10.62 给定显著性水平 0.05,确定表 10-5 中的 40 个成绩的样本是否是随机的.

10.63 一个股票连续 25 天的收盘价列在表 10-42 中,在 0.05 显著性水平下,确定这些价是否是随机的.

表 10-42

10.375	11.125	10.875	10.625	11.500
11.625	11.250	11.375	10.750	11.000
10.875	10.750	11.500	11.250	12.125
11.875	11.375	11.875	11.125	11.750
11.375	12.125	11.750	11.500	12.250

10.64 $\sqrt{2}$的前面的数字为 1.41421 35623 73095 0488….对这些数字的随机性你能得出什么结论.

10.65 对下列数字的随机性你能得出什么结论?

(a)$\sqrt{3}=1.73205\ 08075\ 68877\ 2935\cdots$

(b) $\pi=3.14159\ 26535\ 89793\ 2643\cdots$

10.66 使用随机性的游程检验,解习题 10.30.

10.67 使用随机性的游程检验,解习题 10.32.

10.68 使用随机性的游程检验,解习题 10.34.

秩相关

10.69 在一次竞赛中,两个评判员对 8 个候选者(1 至 8 号)进行优劣排序.评判员提供的排列秩如表10-43.(a)求秩相关系数,(b)决定评判员排列的一致性如何?

表 10-43

第一评判员	5	2	8	1	4	6	3	7
第二评判员	4	5	7	3	2	8	1	6

10.70 在第八章的乘积矩公式中,使用秩资料导出秩相关系数.使用求乘积矩的两种方法说明这一点.

10.71 能找出集群资料的秩相关系数吗?解释,并用例子说明你的回答.

补充习题答案

10.26 在 0.05 水平存在差异,但 0.01 水平没有.

10.27 是.

10.28 在 0.05 水平该程序是有效的.

10.29 在 0.05 水平,我们能拒绝增加销售的假设.

10.30 不能.

10.31 (a)拒绝,(b)接收,(c)接收,(d)拒绝.

10.34 在 0.05 水平不存在差异.

10.35 不能.

10.36 (a)能,(b)能.

10.37 能.

10.38 (a)能,(b)能.

10.41 3.

10.42 6.

10.49 在任一水平均不存在差异.

10.50 在 0.05 水平差异是显著的,但在 0.01 水平不是.

10.51　在 0.05 水平差异是显著的,但在 0.01 水平不是.

10.52　在两个水平,成绩间均存在显著差异.

10.55　(a)8,(b)10.

10.56　(a)10,(b)在 0.05 水平反映是随机的.

10.62　在 0.05 水平样本不是随机的,有太多的游程,指示了一种周期模式.

10.63　在 0.05 水平样本不是随机的,有太少的游程,指示了一种倾向模式.

10.64　在 0.05 水平数字是随机的.

10.65　(a)在 0.05 水平数字是随机的,(b)在 0.05 水平数字是随机的.

10.69　(a)0.67,(b)评判员的排列不是很一致.

附 录 A

一些数学课题

特殊和式

下面是一些在实践中常见的级数和.按定义 $0! = 1$.在级数是无穷时指明了收敛的范围.

1. $\sum_{j=1}^{m} j = 1 + 2 + 3 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$

2. $\sum_{j=1}^{m} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ 一切 x

4. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!}$ 一切 x

5. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!}$ 一切 x

6. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \quad |x| < 1$

7. $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} \quad -1 \leqq x < 1$

欧拉公式

8. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

9. $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

伽马函数

伽马函数记为 $\Gamma(n)$,定义为

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \quad n > 0 \tag{1}$$

递归公式为

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \tag{2}$$

其中 $\Gamma(1) = 1$.用(2)式可获得对 $n > 0$ 的伽马函数的展开式.

所以若是一正整数

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{3}$$

为此 $\Gamma(n)$有时被称为阶乘函数.伽马函数的一个重要性质是

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \tag{4}$$

对 $p = \frac{1}{2}$,(4)式给出

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{5}$$

对较大的 n 值有斯特林近似公式

$$\Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \tag{6}$$

其中符号～表示两边的比值当 $n\to\infty$ 时趋于 1. 特别当 n 是一个大的正整数时, $n!$ 的一个好的近似为

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n} \tag{7}$$

贝塔函数

贝塔函数记为 $B(m,n)$, 定义为

$$B(m,n)=\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}du \quad m>0, n>0 \tag{8}$$

它和伽马函数有关系

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{9}$$

特殊积分

下面是一些在概率论和统计中用到的积分

10. $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\quad a>0$

11. $\int_0^\infty x^m e^{-ax^2}dx=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2a^{(m+1)/2}},\quad a>0, m>-1$

12. $\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-b^2/4a},\quad a>0$

13. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{a}{a^2+b^2},\quad a>0$

14. $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2},\quad a>0$

15. $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}dx=\frac{\Gamma(p)}{a^p},\quad a>0, p>0$

16. $\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+bx+c)}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{(b^2-4ac)/4a},\quad a>0$

17. $\int_0^\infty e^{-(ax^2+bx+c)}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{(b^2-4ac)/4a}\operatorname{erfc}\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right),\quad a>0$

这里

$$\operatorname{erfc}(u)=1-\operatorname{erf}(u)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-x^2}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-x^2}dx$$

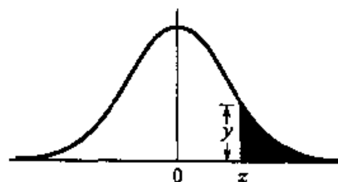
称为补余误差函数

18. $\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{2a}e^{-a\omega},\quad a>0, \omega>0$

19. $\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)},\quad m>0, n>0$

附 录 B

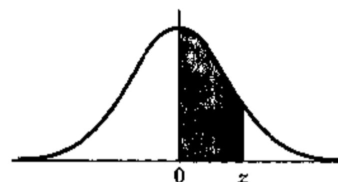
z 值处标准正态曲线的纵坐标 y



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	0.540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	0.404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009
3.5	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3.6	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0004
3.7	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003	.0003	.0003
3.8	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
3.9	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001

附　录　C

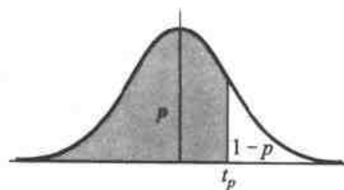
0 至 z 值处标准正态曲线下的面积



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	5000

附 录 D

自由度为 ν 的学生氏 t 分布的百分位数值 t_p

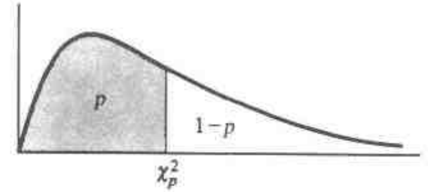


ν	$t_{.55}$	$t_{.60}$	$t_{.70}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$
1	.158	.325	.727	1.000	1.376	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
2	.142	.289	.617	.816	1.061	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92
3	.137	.277	.584	.765	.978	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
4	.134	.271	.569	.741	.941	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60
5	.132	.267	.559	.727	.920	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03
6	.131	.265	.553	.718	.906	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
7	.130	.263	.549	.711	.896	1.42	1.90	2.36	3.00	3.50
8	.130	.262	.546	.706	.889	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36
9	.129	.261	.543	.703	.883	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
10	.129	.260	.542	.700	.879	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
11	.129	.260	.540	.697	.876	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11
12	.128	.259	.539	.695	.873	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06
13	.128	.259	.538	.694	.870	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01
14	.128	.258	.537	.692	.868	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98
15	.128	.258	.536	.691	.866	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95
16	.128	.258	.535	.690	.865	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92
17	.128	.257	.534	.689	.863	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90
18	.127	.257	.534	.688	.862	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88
19	.127	.257	.533	.688	.861	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86
20	.127	.257	.533	.687	.860	1.32	1.72	2.09	2.53	2.84
21	.127	.257	.532	.686	.859	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83
22	.127	.256	.532	.686	.858	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82
23	.127	.256	.532	.685	.858	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81
24	.127	.256	.531	.685	.857	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80
25	.127	.256	.531	.684	.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.79
26	.127	.256	.531	.684	.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78
27	.127	.256	.531	.684	.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77
28	.127	.256	.530	.683	.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76
29	.127	.256	.530	.683	.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.76
30	.127	.256	.530	.683	.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75
40	.126	.255	.529	.681	.851	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
60	.126	.254	.527	.679	.848	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66
120	.126	.254	.526	.677	.845	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62
∞	.126	.253	.524	.674	.842	1.28	1.645	1.96	2.33	2.58

来源：R. A. Fisher and F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*，出版者 Longman Group Ltd., London（过去的出版者 Oliver and Boyd, Edinburgh），本表已经作者和出版者同意.

附　录　E

自由度为 ν 的卡方分布的百分位数值 χ_p^2



ν	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.25}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.75}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.999}$
1	.0000	.0002	.0010	.0039	.0158	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	.0717	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12 8	16.3
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2 67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3 45	5 35	7.84	10.6	12.6	14.4	16 8	18.5	22.5
7	.989	1.24	1 69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24 3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26 1
9	1.73	2.09	2 70	3.33	4.17	5.90	8 34	11.4	14.7	16.9	19 0	21.7	23.6	27.9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9 34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37 7
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26 3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32 0	35.2	38.1	41 6	44.2	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41 9	45.6	48.3	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18 1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	13 6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23 6	28 3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	13.8	15.0	16 8	18.5	20.6	24 5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53 7	59.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33 7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	99.6
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100	104	112
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	102	107	112	116	125
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	108	113	118	124	128	137
100	67.3	70.1	74 2	77.9	82.4	90 1	99.3	109	118	124	130	136	140	149

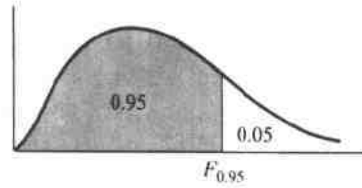
来源:E S. Pearson and H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1(1966),表 8,137 和 138 页,已经允许.

附　录　F

F 分布的 95% 百分位数值 $F_{0.95}$(0.05 水平)

ν_1　分子自由度

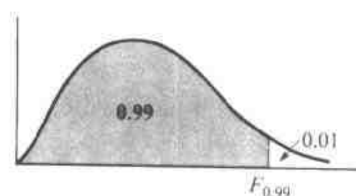
ν_2　分母自由度



ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

来源:E. S. Pearson and H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 2(1972),表 5,178 页,已经允许.

F 分布的 99% 百分位数值 $F_{0.99}$(0.01 水平)



ν_1　分子自由度

ν_2　分母自由度

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6023	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.29	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

来源：E. S. Pearson and H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 2(1972)，表 5，180 页，已经允许．

附 录 G

$e^{-\lambda}$的值

(0<λ<1)

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.0000	.9900	.9802	.9704	.9608	.9512	.9418	.9324	.9231	.9139
0.1	.9048	.8958	.8869	.8781	.8694	.8607	.8521	.8437	.8353	.8270
0.2	.8187	.8106	.8025	.7945	.7866	.7788	.7711	.7634	.7558	.7483
0.3	.7408	.7334	.7261	.7189	.7118	.7047	.6977	.6907	.6839	.6771
0.4	.6703	.6636	.6570	.6505	.6440	.6376	.6313	.6250	.6188	.6126
0.5	.6065	.6005	.5945	.5886	.5827	.5770	.5712	.5655	.5599	.5543
0.6	.5488	.5434	.5379	.5326	.5273	.5220	.5169	.5117	.5066	.5016
0.7	.4966	.4916	.4868	.4819	.4771	.4724	.4677	.4630	.4584	.4538
0.8	.4493	.4449	.4404	.4360	.4317	.4274	.4232	.4190	.4148	.4107
0.9	.4066	.4025	.3985	.3946	.3906	.3867	.3829	.3791	.3753	.3716

(λ=1,2,3,…,10)

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e^{-\lambda}$	.36788	.13534	.04979	.01832	.006738	.002479	.000912	.000335	.000123	.000045

注：为获得其他λ值的$e^{-\lambda}$的值，可使用指数律．例如：$e^{-3.48}=(e^{-3.00})(e^{-0.48})=0.04979\times0.6188=0.03081$．

附　录　H

随机数

51772	74640	42331	29044	46621	62898	93582	04186	19640	87056
24033	23491	83587	06568	21960	21387	76105	10863	97453	90581
45939	60173	52078	25424	11645	55870	56974	37428	93507	94271
30586	02133	75797	45406	31041	86707	12973	17169	88116	42187
03585	79353	81938	82322	96799	85659	36081	50884	14070	74950
64937	03355	95863	20790	65304	55189	00745	65253	11822	15804
15630	64759	51135	98527	62586	41889	25439	88036	24034	67283
09448	56301	57683	30277	94623	85418	68829	06652	41982	49159
21631	91157	77331	60710	52290	16835	48653	71590	16159	14676
91097	17480	29414	06829	87843	28195	27279	47152	35683	47280